CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Compléments d'intégration

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (xOy)$. Pour un réel $h > 0$ fixé, on note $\mathcal{D}_h$ le domaine du plan délimité par

— les droites d'équations $y = 0$ et $x = h$,
— la courbe du plan d'équation $y^2 - 4x = 0$.

1. Dessiner le domaine $\mathcal{D}_h$. On précisera les coordonnées des sommets de $\mathcal{D}_h$.
2. Montrer que le domaine $\mathcal{D}_h$ mesure $\mathcal{A}(\mathcal{D}_h) = \dfrac{4}{3}h\sqrt{h}$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du centre de gravité $G = (x_G, y_G)$ du domaine $\mathcal{D}_h$ et le placer sur le dessin.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère $\mathcal{R} = (xOy)$, on note $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a et b étant deux réels strictement positifs fixés. Par ailleurs, on note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par $\mathcal{E}$ et on note

$$\begin{array}{rcccl} F & : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{array} \right. \end{array}$$

1. Montrer que F est une paramétrisation de l'ellipse $\mathcal{E}$. On précisera le sens de parcours induit par cette paramétrisation.
2. On souhaite calculer le moment d'inertie du domaine $\mathcal{D}$ par rapport au centre O du repère $\mathcal{R}$.
   (a) Exprimer le moment quadratique cherché sous la forme d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes.

(b) À l'aide de la formule de Green-Riemann, calculer le moment d'inertie cherché.

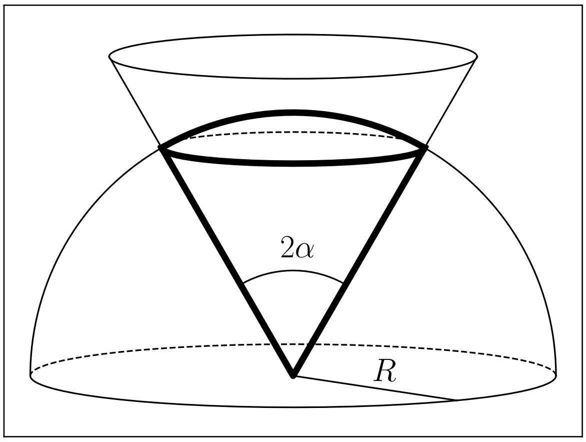
Ind. : on pourra s'appuyer sur le champ de vecteurs

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (xy^2, yx^2) \end{array}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

On note $\mathcal{D}$ le volume de l'espace (représenté ci-dessous) défini par l'intersection d'une sphère de rayon $R > 0$ et d'un cône de révolution centré au centre de la sphère et d'angle d'ouverture $2\alpha > 0$.



1. Montrer que le domaine $\mathcal{D}$ mesure $\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \dfrac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos(\alpha))$.
2. Déterminer la position du centre de gravité du domaine $\mathcal{D}$. On pourra s'appuyer sur des arguments de symétrie pour limiter les calculs.
3. On plonge le domaine $\mathcal{D}$ dans le champ de vecteurs

$$\Phi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^2 + 2yz, y^2 + 2xz, z^2 + 2xy) \end{array}$$

Calculer le flux de Φ sortant du domaine $\mathcal{D}$.

⋆ ⋆
⋆

Formulaire

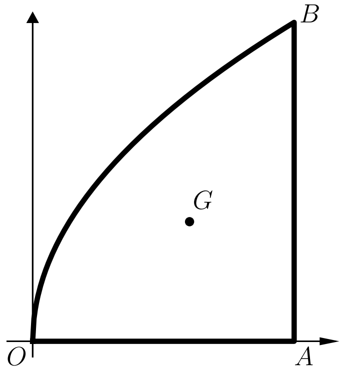
Primitive	Trigonométrie
$u'.u^\alpha \overset{\int}{\Longrightarrow} \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	• $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ • $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. Les sommets de $\mathcal{D}_h$ situés sur l'axe (Ox) sont les points $O = (0,0)$ et $A = (h,0)$.

   Le troisième sommet de $\mathcal{D}_h$ est le point $B = (x,y)$ appartenant à la droite $x = h$ et à la courbe $y^2 - 4x = 0$ et vérifiant $y \geqslant 0$. On a donc

$$\begin{cases} x = h \\ y^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = h \\ y = 2\sqrt{h} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad B = (h, 2\sqrt{h})$$



2. Par définition, on a

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_h) = \iint_{\mathcal{D}_h} dS$$

   où

$$\mathcal{D}_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant x \leqslant h,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}\}$$

   Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{D}_h) = \iint_{\mathcal{D}_h} dS &= \int_{x=0}^{h} \left(\int_{y=0}^{2\sqrt{x}} dy \right) dx \\ &= \int_0^h 2\sqrt{x}\, dx \\ &= 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^h = \frac{4}{3} h\sqrt{h} \end{aligned}$$

3. Par définition, on a

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{D}_h)} \iint_{\mathcal{D}_h} x\, dS \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathcal{D}_h)} \iint_{\mathcal{D}_h} y\, dS$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{3}{4h\sqrt{h}} \int_{x=0}^{h} x \left(\int_{y=0}^{2\sqrt{x}} dy \right) dx = \frac{3}{4h\sqrt{h}} \int_{x=0}^{h} 2x\sqrt{x}\, dx \\ &= \frac{3}{2h\sqrt{h}} \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^h = \frac{3}{5} h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{3}{4h\sqrt{h}} \int_{x=0}^{h} \left(\int_{y=0}^{2\sqrt{x}} y\, dy \right) dx = \frac{3}{4h\sqrt{h}} \int_{x=0}^{h} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{3}{2h\sqrt{h}} \int_0^h x\, dx = \frac{3}{2h\sqrt{h}} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h = \frac{3}{4}\sqrt{h} \end{aligned}$$

D'où

$$G = \left(\frac{3}{5}h, \frac{3}{4}\sqrt{h} \right)$$

Voir le premier dessin pour une représentation graphique.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. Soit $t \in [0, 2\pi]$ fixé. Le point $F(t) = (x(t), y(t)) = (a\cos(t), b\sin(t))$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} &= \frac{(\cancel{a}\cos(t))^2}{\cancel{a^2}} + \frac{(\cancel{b}\sin(t))^2}{\cancel{b^2}} \\ &= \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc le point $M = F(t)$ appartient à $\mathcal{E}$.

Réciproquement, considérons un point $M = (x, y)$ appartenant à $\mathcal{E}$. Par définition, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Le point $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ est donc un point du cercle unité. Il existe donc un nombre réel $t \in [0, 2\pi]$ tel que

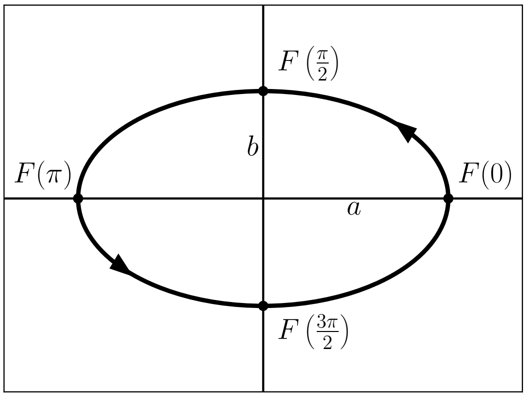
$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos(t) \\ \frac{y}{b} = \sin(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases} \Leftrightarrow M = F(t)$$

La fonction vectorielle F réalise donc une paramétrisation de $\mathcal{E}$.

Par ailleurs, en notant que

$$F(0) = (a, 0), \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, b), \quad F(\pi) = (-a, 0), \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -b)$$

on note que la paramétrisation F parcourt l'ellipse $\mathcal{E}$ dans le sens trigonométrique :



2. (a) Par définition, le moment quadratique cherché est

$$I = \iint_{\mathcal{D}} d(M,O)^2 \, dS$$

Par ailleurs, pour tout point $M = (x,y) \in \mathcal{D}$, on a

$$d(M,O) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donc

$$I = \iint_{\mathcal{D}} x^2 + y^2 \, dxdy$$

(b) D'après la formule de Green-Riemann, l'intégrale I cherchée est égale au flux sortant de $\mathcal{E}$ de tout champ de vecteur du plan dont la divergence vaut $x^2 + y^2$. Ainsi, en posant

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) = xy^2 \\ f_2(x,y) = yx^2 \end{cases}$$

on a

$$\operatorname{div}(\Phi)(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = y^2 + x^2$$

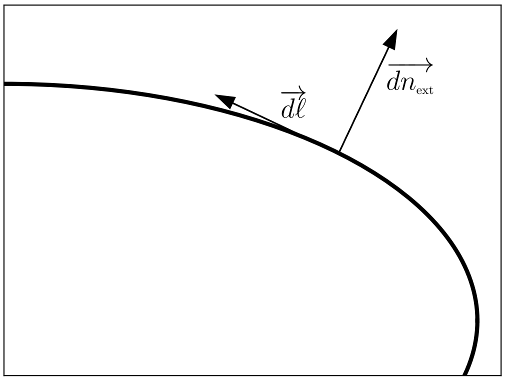
donc

$$I = \oint_{\mathcal{E}} \Phi(M) \cdot \overrightarrow{dn_{\text{ext}}}$$

On obtient donc le moment cherché en calculant ce flux.

Pour cela, on note $\overrightarrow{d\ell} = (dx, dy)$ le vecteur tangent élémentaire issu du parcours de $\mathcal{E}$ induit par la paramétrisation.

Au vue du sens de parcours déterminé à la question précédente, le vecteur $\overrightarrow{dn_{\text{ext}}}$ est obtenu en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{d\ell}$ dans le sens horaire :



On a donc

$$\overrightarrow{dn_{\text{ext}}} = (dy, -dx)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \\ &= \oint_{\mathcal{E}} xy^2\,dy - yx^2\,dx \end{aligned}$$

En introduisant la paramétrisation F dans cette intégrale curviligne, on obtient

$$I = \int_0^{2\pi} (x(t)\,y(t)^2\,y'(t) - y(t)\,x(t)^2\,x'(t))\,dt$$

et

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -a\sin(t) \\ y'(t) = b\cos(t) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \big(a\cos(t)\,(b\sin(t))^2\,b\cos(t) - b\sin(t)\,(a\cos(t))^2\,(-a\sin(t))\big)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(ab^3\cos^2(t)\sin^2(t) + a^3b\cos^2(t)\sin^2(t)\big)\,dt \\ &= ab(a^2+b^2)\int_0^{2\pi} (\cos(t)\sin(t))^2\,dt = \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\int_0^{2\pi} (2\cos(t)\sin(t))^2\,dt \\ &= \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,dt = \frac{ab(a^2+b^2)}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt \\ &= \frac{ab(a^2+b^2)}{8}\left(2\pi - \cancel{\left[\frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{2\pi}}\right) = \boxed{\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}} \end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 3 (Exercice ▲)

1. Par définition, le volume du domaine $\mathcal{D}$ étudié est

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dV$$

Par ailleurs, si l'on fixe un repère $\mathcal{R} = (Oxyz)$ de l'espace, centré au centre de la sphère et tel que l'axe (Oz) coïncide avec l'axe de symétrie du cone étudié et en notant (r, θ, φ) les coordonnées sphériques associées à ce repère, on a

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha\}$$

et $dV = r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dV &= \int_{r=0}^{R} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\alpha} r^2 \sin(\varphi)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&= \left(\int_0^R r^2\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\alpha} \sin(\varphi)\, d\varphi \right) \\
&= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \times [\theta]_0^{2\pi} \times [-\cos(\varphi)]_0^{\alpha} \\
&= \boxed{\frac{2\pi R^3}{3}(1 - \cos(\alpha))}
\end{aligned}$$

2. Le domaine $\mathcal{D}$ étudié étant symétrique par rotation autour de l'axe (Oz), le centre de gravité $G = (x_G, y_G, z_G)$ de $\mathcal{D}$ est situé sur l'axe (Oz). Autrement dit, on a

$$x_G = y_G = 0$$

Par ailleurs, par définition, on a

$$z_G = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathcal{D})} \iiint_{\mathcal{D}} z\, dV$$

soit, en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{3}{2\pi R^3(1 - \cos(\alpha))} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\alpha} r\cos(\varphi)\, r^2 \sin(\varphi)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr \\
&= \frac{3}{2\pi R^3(1 - \cos(\alpha))} \left(\int_0^R r^3\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\alpha} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi \right) \\
&= \frac{3}{2\pi R^3(1 - \cos(\alpha))} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^2(\varphi)}{2} \right]_0^{\alpha} \\
&= \frac{3}{\cancel{2\pi} \cancel{R^3}(1 - \cos(\alpha))} \times \frac{R^{\cancel{4}}}{4} \times \cancel{2\pi} \times \left(\frac{1 - \cos^2(\alpha)}{2} \right) \\
&= \frac{3R\cancel{(1 - \cos(\alpha))}(1 + \cos(\alpha))}{8\cancel{(1 - \cos(\alpha))}} \\
&= \frac{3R}{8}(1 + \cos(\alpha))
\end{aligned}$$

3. En notant ∂D la surface délimitant le domaine $\mathcal{D}$, le flux cherché est donné par l'intégrale de surface

$$\varphi = \iint_{\partial D} \Phi(M) \cdot \overrightarrow{n_{\text{ext}}}\, d\sigma$$

Par ailleurs, d'après la formule de Green-Ostrogradsky, on a également

$$\varphi = \iint_{\partial D} \Phi(M) \cdot \overrightarrow{n_{\text{ext}}}\, d\sigma = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\Phi)(M)\, dV$$

Or en notant respectivement f_1, f_2 et f_3 les fonctions coordonnées du champ de vecteurs Φ, en tout point $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\Phi)(x,y,z) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \\
&= 2x + 2y + 2z = 2(x+y+z)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi &= 2 \iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)\, dxdydz \\
&= 2 \left(\iiint_{\mathcal{D}} x\, dxdydz + \iiint_{\mathcal{D}} y\, dxdydz + \iiint_{\mathcal{D}} z\, dxdydz \right) \\
&= 2 \left(\cancel{\mathcal{V}(\mathcal{D})\, x_G} + \cancel{\mathcal{V}(\mathcal{D})\, y_G} + \mathcal{V}(\mathcal{D})\, z_G \right) \\
&= 2 \frac{\pi R^4}{4} \left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = \frac{\pi R^4}{2} \sin^2(\alpha)
\end{aligned}$$

⋆ ⋆

⋆