# CONTRÔLE CONTINU

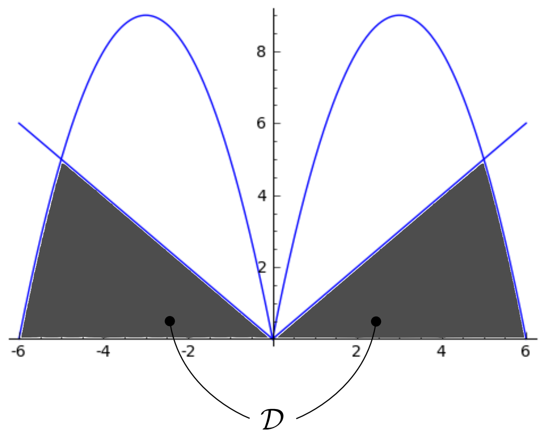
Compléments d'intégration

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

## Exercice 1

On note $\mathcal{D}$ le domaine ci contre, délimité par
- l'axe $(Ox)$,
- les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$,
- les paraboles d'équations $y = 6x - x^2$ et $y = -6x - x^2$.




1. Montrer que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \dfrac{91}{3}$.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité $G$ de $\mathcal{D}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

Le but de cet exercice est de déterminer

$$I = \lim_{n \to +\infty} I_n \qquad (\text{noté } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx).$$

Pour cela, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leqslant n^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant n,\ 0 \leqslant y \leqslant n\}.$$

1. Calculer
$$J_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$
et montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{4}.$$
2. Montrer que
$$\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = I_n^2.$$
3. Montrer (par un argument géométrique) que
$$J_n \leqslant \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy \leqslant J_{2n}.$$
4. En déduire la valeur de $I$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** On appelle cycloïde la courbe décrite par le point d'une roue de vélo qui avance. Une paramétrisation d'une cycloïde correspondant à un tour de roue de rayon $a > 0$ est

$$(\mathcal{C}_a) \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & a(t - \sin t) \\ y(t) & = & a(1 - \cos t) \end{array} \right. , \quad t \in [0, 2\pi].$$

1. Calculer la longueur de la cycloïde $\mathcal{C}_a$ définie ci-dessus.
2. On considère le champs de force
$$\overrightarrow{F} \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, -y) \end{array}$$
Calculer le travail de $\overrightarrow{F}$ sur $\mathcal{C}_a$.

⋆ ⋆
⋆

# CORRECTION

**Exercice 1** :

1. ON commence par déterminer les points d'intersection des paraboles avec les droites d'équations $y = \pm x$. On trouve $P_1 = (5, 5)$ et $P_2 = (-5, 5)$.

   D'autre part, le domaine étant symétrique par rapport à l'axe $(Oy)$, on se contente de mesurer l'aire de la partie de droite, que l'on découpe en deux parties distinctes :

   $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 5 \leqslant x \leqslant 6,\ 0 \leqslant y \leqslant 6x - x^2\}$

   Ainsi :
$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \iint_{\mathcal{D}_1} dS = \int_0^5 \left( \int_0^x dy \right) dx = \int_0^5 x dx = \frac{25}{2}.$$
   et
$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = \iint_{\mathcal{D}_2} dS = \int_5^6 \left( \int_0^{6x-x^2} dy \right) dx = \int_5^6 6x - x^2 dx = \frac{8}{3}$$
   Ainsi,
$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = 2(\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)) = \frac{91}{3}.$$

2. Le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport à l'axe $(Oy)$, le centre de gravité de $\mathcal{D}$ est sur l'axe $(Oy)$. Donc $\overline{x} = 0$.
   D'autre part
$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y dS}{\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} dS}$$
   Or d'après la question précédente, $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} dS = \frac{91}{3}$ et
$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} y dS &= \int_{-6}^{-5} \left( \int_0^{-6x-x^2} y dy \right) dx + \int_{-5}^{0} \left( \int_0^{-x} y dy \right) dx \\ &\quad + \int_0^5 \left( \int_0^x y dy \right) dx + \int_5^6 \left( \int_0^{6x-x^2} y dy \right) dx \\ &= \int_{-6}^{-5} \frac{(-6x - x^2)^2}{2} dx + \int_{-5}^{0} \frac{x^2}{2} dx + \int_0^5 \frac{x^2}{2} dx + \int_5^6 \frac{(6x - x^2)^2}{2} dx \\ &= \frac{23}{5} + \frac{125}{6} + \frac{125}{6} + \frac{23}{5} = \frac{763}{15}\end{aligned}$$
   Donc
$$\overline{y} = \frac{763}{15} . \frac{3}{91} = \frac{109}{65} \approx 1.68$$
   et $G = (0, 1.68)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. $\mathcal{D}_n$ est le quart de cercle de rayon $n$ présent dans le premier quadrant du plan. Pour calculer $J_n$, on passe donc en coordonnées polaires $(r, \theta)$. Pour effectuer le calcul, on doit

   – exprimer $\mathcal{D}_n$ en fonction des coordonnées polaires,
   – déterminer la nouvelle fonction à intégrer,
   – déterminer le nouvel élément d'aire.

   Or
   – $\mathcal{D}_n = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant n, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.
   – Puisque $x^2 + y^2 = r^2$, on a $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} = e^{-r^2} = \tilde{f}(r, \theta)$.
   – En coordonnées polaires, on a $dS = rdrd\theta$ (que l'on retrouve, le cas échéant, en calculant le déterminant de la jacobienne).

   Ainsi,

$$\begin{aligned} J_n = \iint_{\mathcal{D}_n} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^n e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^n r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n \\ &= \frac{\pi}{4}(1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

   En passant à la limite $n \to +\infty$ dans la dernière formule, on obtient $\lim\limits_{+\infty} J_n = \frac{\pi}{4}$.

2. D'après la définition de $C_n$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_0^n \left( \int_0^n e^{-x^2-y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^n \left( \int_0^n e^{-x^2} . e^{-y^2} dx \right) dy \end{aligned}$$

   Autrement dit, la fonction que l'on intègre est à variables séparées. Puisque les quatre bornes de l'intégrale sont constantes, on peut séparer les intégrales :

$$\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^n e^{-y^2} dy \right) = I_n^2.$$

3. Les trois intégrales $J_n$, $\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et $J_{2n}$ portent toutes trois sur la même fonction

$$f \ : \ (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}.$$

   Or $f$ étant strictement positive, chaque intégrale représente la mesure d'un volume de l'espace. Enfin, le fait que les trois domaines d'intégration vérifient $\mathcal{D}_n \subset C_n \subset \mathcal{D}_{2n}$ assure que ces trois volumes sont inclus les uns dans les autres. On obtient donc la chaîne d'inégalités cherchée.

4. D'après le théorème des gendarmes, puisque $\lim_{+\infty} J_n = \lim_{+\infty} J_{2n} = \dfrac{\pi}{4}$, on a

$$\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dxdy = I_n^2 \longrightarrow \frac{\pi}{4}.$$

D'où $I^2 = \frac{\pi}{4}$ et

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. Par définition,

$$L(\mathcal{C}_a) = \int_{\mathcal{C}_a} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Or

$$\begin{cases} x(t) = at - a\sin t & \Rightarrow & x'(t) = a - a\cos t \\ y(t) = a - a\cos t & \Rightarrow & y'(t) = a\sin t \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} L(\mathcal{C}_a) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a - a\cos t)^2 + (a\sin t)^2} dt \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt \end{aligned}$$

Il reste à calculer cette intégrale simple à l'aide de la formule $1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$ :

$$L(\mathcal{C}_a) = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[ -2\cos\frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

2. Par définition, on a

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}_a}(\overrightarrow{F}) &= \int_{\mathcal{C}_a} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d\ell} = \int_{\mathcal{C}_a} xdx - ydy \\ &= \int_0^{2\pi} (x(t).x'(t) - y(t)y'(t)) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}x(t)^2 - \frac{1}{2}y(t)^2 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left( x(2\pi)^2 - y(2\pi)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}(2a\pi)^2 = 2a^2\pi^2. \end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆