CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

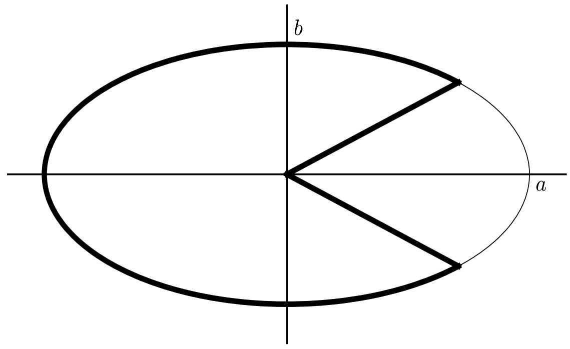
Exercice 1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé dans lequel on considère une pièce taillée dans une ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dont une paramétrisation est

$$\gamma \,:\, t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t)), \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$



1. En effectuant le changement de variable $(x, y) \rightsquigarrow (r, \theta)$ donné par $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$, montrer que l'aire de la pièce est
$$\mathcal{A} = \frac{3\pi ab}{4}$$
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes du centre de gravité G de la pièce.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans un repère $(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan dans lequel on considère le point $B = (4, 2)$ ainsi que la forme différentielle

$$\omega = x^2dx - 4ydy.$$

De plus, on note
- $\mathcal{C}_1$ le segment $[OB]$,
- $\mathcal{C}_2$ l'arc de la courbe d'équation $x = y^2$ liant O à B.

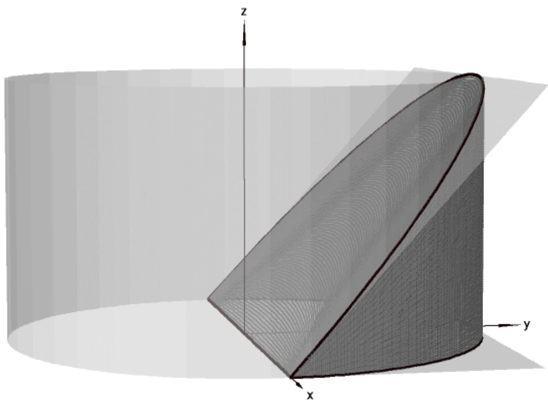
1. Déterminer des paramétrisations pour chacun des arcs $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. En déduire la valeur des intégrales

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} \omega \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \omega.$$

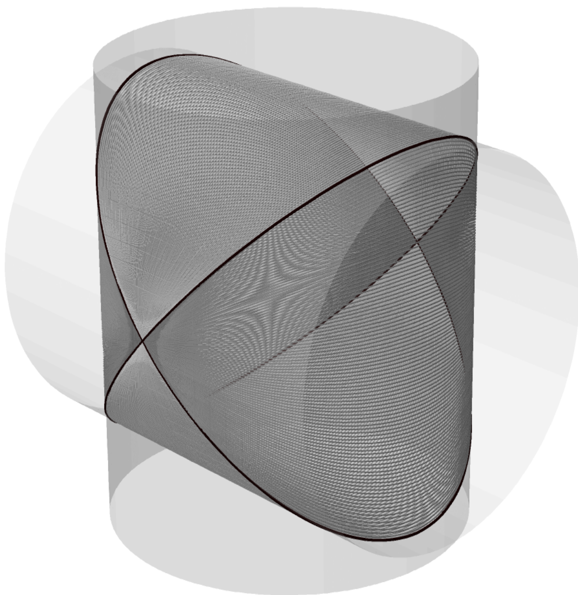
3. Quel indice ces calculs donnent-ils sur la nature de ω ?
4. Déterminer une fonction f telle que ω soit la différentielle totale df de f.
5. Retrouver la valeur de I_1 et I_2 à l'aide de la fonction f.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. Déterminer le volume d'un objet ci-dessous, construit à partir du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et les plans d'équations $z = 0$ et $y - z = 0$.



2. En déduire le volume contenu à l'intersection de deux cylindres de rayons R dont les axes sont sécants et perpendiculaires.



⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Par définition, l'aire de la pièce $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{A} = \iint_{\mathcal{P}} dS$$

Pour effectuer le changement de variables proposé, il faut
- exprimer $\mathcal{P}$ à l'aide des nouvelles variables,
- déterminer le nouvel élément d'aire dS.

Or en calculant le jacobien du changement de variables proposé, on trouve $dS = abrdrd\theta$.
D'autre part, en s'appuyant sur la paramétrisation proposée, on constate que

$$\mathcal{P} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant 1, \ \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Ainsi,

$$\mathcal{A} = ab \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\int_0^1 rdr\right) d\theta = \frac{3ab\pi}{2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 = \frac{3ab\pi}{4}.$$

2. Par symétrie, on a $\overline{y} = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint xdS}{\displaystyle\iint dS} &= \frac{4}{3ab\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\left(\int_0^1 ar\cos\theta r dr\right)d\theta \\ &= \frac{4}{3b\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2 dr\right) = \frac{4}{3b\pi}\left[\sin\theta d\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{9b\pi}\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. - $\mathcal{C}_1$ est un morceau de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$. Une paramétrisation de $\mathcal{C}_1$ est donc

$$\gamma_1 \ : \ t \mapsto \left(t, \frac{t}{2}\right), \quad t \in [0,4].$$

   - $\mathcal{C}_2$ est sur la courbe d'équation $x = y^2$. En prenant y comme paramètre, on obtient

$$\gamma_2 \ : \ t \mapsto (t^2, t), \quad t \in [0,2].$$

2. • Par définition, on a

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} x^2 dx - 4y dy$$

Or

$$\begin{cases} x(t) = t & \Rightarrow \quad dx = x'(t)dt = dt \\ y(t) = \frac{t}{2} & \Rightarrow \quad dy = y'(t)dt = \frac{1}{2}dt \end{cases}$$

d'où

$$I_1 = \int_0^4 \left(t^2 - t\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^4 = \frac{40}{3}.$$

• De même, on a

$$I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \omega = \int_{\mathcal{C}_2} x^2 dx - 4y dy$$

Or

$$\begin{cases} x(t) = t^2 & \Rightarrow \quad dx = x'(t)dt = 2tdt \\ y(t) = t & \Rightarrow \quad dy = y'(t)dt = dt \end{cases}$$

d'où

$$I_2 = \int_0^2 \left(2t^5 - 4t\right) dt = \left[\frac{t^6}{3} - 2t^2\right]_0^2 = \frac{40}{3}.$$

3. Les deux résultats de la question précédente semblent indiquer que le travail de $\overrightarrow{F}$ ne dépend pas du chemin emprunté pour aller de O à B. Bien que cela ne prouve rien, cela semble indiquer que $\overrightarrow{F}$ est un champs de gradient.
4. On cherche donc une fonction f telle que $\overrightarrow{F} = \nabla f$. i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 & (1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y & (2) \end{cases}$$

En intégrant (1) par rapport à x, on obtient

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + k(y).$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à y et en identifiant avec (2), on obtient

$$k'(y) = -4y$$

En intégrant cette dernière expression (par rapport à y), on obtient $k(y) = 2y^2$ et

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

5. Puisque $\overrightarrow{F}$ est le champs de gradient de f, quelque soit le chemin liant O à B, le travail de $\overrightarrow{F}$ sur ce chemin est

$$W(\overrightarrow{F}) = f(B) - f(O) = f(4,2) - f(0,0) = \frac{40}{3}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Il existe plusieurs méthodes pour calculer le volume $\mathcal{V}$ cherché. La première consiste à sommer l'élément de volume dV sur l'ensemble du volume

$$\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} dV$$

La seconde consiste à intégrer, sur le demi cercle du plan de base, la fonction f ; $(x, y) \mapsto y$. Dans les deux cas, la présence du cylindre incite à passer en coordonnées cylindriques (pour la première méthode) ou polaires (pour la seconde).
Exposons ici la première méthode (la seconde étant laissée en exercice) : en coordonnées cylindriques le volume sur lequel on intègre est

$$\mathcal{V} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant r \sin\theta\}$$

et l'élément de volume dV est $dV = rdrd\theta dz$. D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_0^\pi \left(\int_0^R \left(\int_0^{r\sin\theta} rdz\right) dr\right) d\theta \\ &= \left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^R r^2 dr\right) \\ &= \frac{2}{3}R^3 \end{aligned}$$

2. L'intersection des deux cylindre est composée de 8 volumes calculés à la question précédente. Le volume total de cette intersection est donc

$$\mathcal{V}_{\text{tot}} = 8 \times \frac{2}{3}R^3 = \frac{16}{3}R^3.$$

⋆ ⋆
⋆