CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

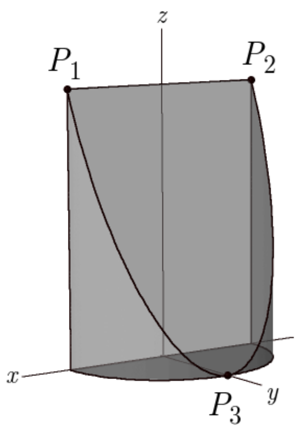
Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

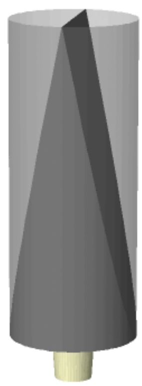
Exercice 1 Soient a et h deux réels positifs et

$$C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leqslant a^2, \ x \geqslant 0\}.$$

1. *Volume d'un tube de dentifrice*
   (a) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ de l'espace passant par les points
   $$P_1 = (a, 0, h), \quad P_2 = (-a, 0, h), \quad P_3 = (0, a, 0).$$
   (Rappel : le plan $\mathcal{P}$ n'étant pas vertical, il admet une équation de la forme $z = \alpha x + \beta y + \gamma$).
   (b) Montrer que si (r, θ) sont les coordonnées polaires dans le plan (xOy), le plan $\mathcal{P}$ est la surface associée à la fonction
   $$\tilde{f} \ : \ (r, \theta) \mapsto h \left(1 - \frac{r}{a} \sin\theta\right).$$
   (c) En déduire le volume du domaine de l'espace $D(a, h)$ représenté ci-dessous celui d'un tube de dentifrice taillé dans un cylindre de rayon a et de hauteur h.



$D(a, h)$



Tube de dentifrice

2. *Centre de gravité*
   (a) Décrire $D(a, h)$ à l'aide des coordonnées cylindriques (r, θ, z) de l'espace.
   (b) Déterminer les coordonnées cartésiennes du centre de gravité du domaine $D(a, h)$.
   (c) En déduire la position du centre de gravité du tube de dentifrice (on négligera la contribution du bouchon).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 Soit D le domaine du plan délimité par les courbes

$$\mathcal{C}_1 \;:\; y = \sqrt{1+x},\; x \in [-1,0], \qquad \mathcal{C}_2 \;:\; y = \sqrt{1-x},\; x \in [0,1]$$

et l'axe (Ox).

1. Calculer l'aire $A(D)$ du domaine D.
2. Exprimer les coordonnées cartésiennes du centre de gravité $G = (\overline{x}, \overline{y})$ de D (supposé homogène) à l'aide d'intégrales doubles.
3. (a) À l'aide de la formule de Green-Riemann, exprimer les coordonnées de G à l'aide d'intégrales curvilignes le long de la frontière ∂D de D.
   (b) Déterminer une paramétrisation du contour ∂D de D.
   (c) Calculer $\overline{y}$.
   (d) Montrer par le calcul que $\overline{x} = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient$\Phi \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potentiel scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{F} = -\nabla\Phi$ le champs de force associé dans le plan.

L'objectif est ici d'étudier les variations d'énergie d'une particule soumise uniquement au champs de force $\overrightarrow{F}$ et se déplaçant dans le plan, le long d'un chemin $\widehat{AB}$. On suppose pour cela que l'on connaît une paramétrisation

$$\gamma \,:\, t \mapsto (x(t), y(t)), \quad t \in [a,b]$$

de l'arc $\widehat{AB}$ donnant, à chaque instant t la position de la particule.

On rappelle

- le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\forall t \in [a,b], \quad \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = m.\overrightarrow{a}(t)$$

  $\overrightarrow{a}(t)$ étant le vecteur accélération à l'instant t,
- l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m ||\overrightarrow{v}(t)||^2,$$

  $\overrightarrow{v}(t)$ étant le vecteur vitesse à l'instant t.

1. Exprimer à l'aide de γ, la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et l'accélération $\overrightarrow{a}(t)$ de la particule à chaque instant t.
2. Exprimer en fonction de Φ le travail exercé par $\overrightarrow{F}$ sur la particule au cours du trajet.
3. Montrer à l'aide du PFD que

$$\forall t \in [a,b], \quad m(x'(t).x''(t) + y'(t).y''(t)) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t), y(t)).x'(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x(t), y(t)).y'(t)$$

4. Montrer que la variation d'énergie cinétique de la particule entre le point A et le point B est égale au travail exercé par $\overrightarrow{F}$ au cours du trajet.
5. Comment interpréter physiquement le signe de cette variation d'énergie ?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1

1. (a) En introduisant les coordonnées des trois points P_1, P_2 et P_3 dans l'équation, on obtient

$$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= -\frac{h}{a} \\ \gamma &= h \end{cases}$$

et

$$z = -\frac{h}{a}y + h.$$

(b) D'après la question précédente, le plan $\mathcal{P}$ est donc la surface associée à la fonction $f : (x,y) \mapsto -\frac{h}{a}y + h$. En passant aux coordonnées polaires, la relation

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

donne

$$f(x,y) = -\frac{h}{a}y + h = h\left(1 - \frac{r}{a}\sin\theta\right) = \tilde{f}(r,\theta).$$

(c) Le volume de $D(a,h)$ est

$$V = \iint_{D(a,h)} f(x,y)dxdx = \iint_{D(a,h)} \tilde{f}(r,\theta)rdrd\theta.$$

Pour calculer cette intégral, on exprime $D(a,h)$ en fonction de (r,θ) :

$$D(a,h) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant a, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

et

$$V = \int_0^\pi \left(\int_0^a rh\left(1 - \frac{r}{a}\sin\theta\right)dr\right)d\theta = ha^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Le tube étant composé de deux fois le domaine $D(a,h)$, on a

$$V_T = 2V = ha^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

2. (a) D'après l'étude précédente, on a

$$D(a,h) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y) \in C_a, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h\left(1 - \frac{y}{a}\right)\right\}.$$

En coordonnées cylindriques, on a donc

$$D(a,h) = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant a, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant z \leqslant h\left(1 - \frac{r}{a}\sin\theta\right)\right\}$$

(b) Par définition, les coordonnées $\overline{x}$ et $\overline{y}$ du centre de gravité de $D(a,h)$ vérifient :

$$\overline{x} = \frac{1}{V}\iiint_{D(a,h)} xdxdydz, \quad \overline{y} = \frac{1}{V}\iiint_{D(a,h)} ydxdydz, \quad \overline{z} = \frac{1}{V}\iiint_{D(a,h)} zdxdydz$$

D'autre part, par symétrie, on a $\overline{x}=0$ et le calcul de $\overline{y}$ et $\overline{z}$ se fait en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}
\iiint_{D(a,h)} y dx dy dz &= \iiint_{D(a,h)} r\sin\theta . r dr d\theta dz \\
&= \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\int_0^a r^2 \left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\sin\theta\right)} dz \right) dr \right) d\theta \\
&= h\int_0^{\pi} \sin\theta \left(\int_0^a r^2 - \frac{r^3}{a}\sin\theta dr \right) d\theta \\
&= h\int_0^{\pi} \sin\theta \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a}\sin\theta \right]_0^a d\theta \\
&= ha^3 \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\sin\theta - \frac{1}{8}(1-\cos(2\theta)) d\theta \\
&= ha^3 \left[-\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{\theta}{8} + \frac{1}{16}\sin(2\theta) \right]_0^{\pi} \\
&= ha^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{y} = \frac{ha^3\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}\right)}{ha^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)} = a\frac{16-3\pi}{12\pi-16}$$

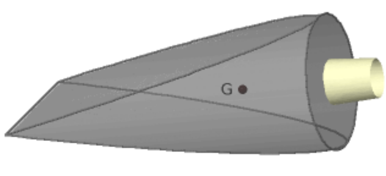
$$\begin{aligned}
\iiint_{D(a,h)} z dx dy dz &= \iiint_{D(a,h)} z . r dr d\theta dz \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_0^a r \left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\sin\theta\right)} z dz \right) dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_0^a r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\sin\theta\right)} dr \right) d\theta \\
&= \frac{h^2}{2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^a r - \frac{r^2}{a}\sin\theta + \frac{r^3}{a^2}\sin^2\theta dr \right) d\theta \\
&= \frac{h^2}{2} \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}\sin\theta + \frac{r^4}{4a^2}\sin^2\theta \right]_0^a d\theta \\
&= \frac{a^2h^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta d\theta \\
&= ha^3 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{\theta}{8} - \frac{1}{16}\sin(2\theta) \right]_0^{\pi} \\
&= ha^3 \left(\frac{5}{8}\pi - \frac{2}{3} \right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\overline{z} = \frac{ha^3\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{2}{3}\right)}{ha^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)} = a\frac{15\pi-16}{12\pi-16}$$

(c) Par symétrie, le centre de gravité G_T du tube se situe sur l'axe (Oz). D'autre part, G_T se situe à la même hauteur que le point G déterminé précédemment. Autrement dit

$$G_T = \left(0, 0, a\frac{15\pi-16}{12\pi-16}\right).$$



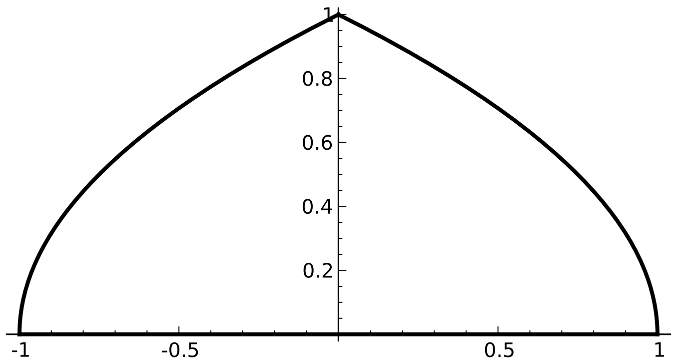
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Par définition, $D = D_1 \cup D_2$ où

   $$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1+x}\} \quad \text{et} D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x}\}$$

   sont de même taille :



   D'où

   $$\begin{aligned} A(D) &= A(D_1) + A(D_2) = 2A(D_2) = 2\iint_{D_2} dS \\ &= 2\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} dy\right) dx \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{1-x}dx = 2\left[-\frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Par définition, les coordonnées de $G = (\overline{x}, \overline{y})$ sont données par

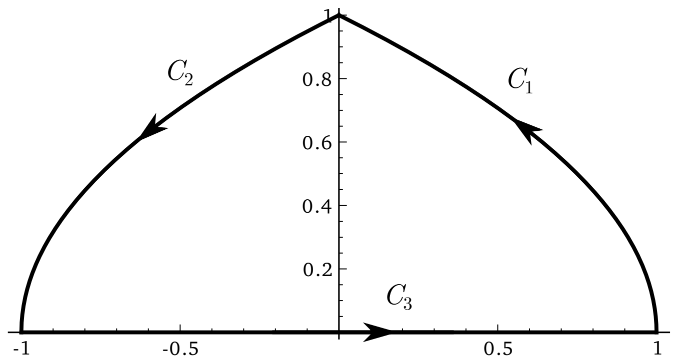
   $$\overline{x} = \frac{1}{A(D)}\iint_D xdxdy \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{1}{A(D)}\iint_D ydxdy$$

3. (a) D'après la formule de Green-Riemann, l'intégrale double donnant $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) correspond au flux à travers ∂D de tout champs de vecteur du plan dont la divergence vaut x (resp. y). Ainsi, en prenant

   $$\overrightarrow{F_1} : (x,y) \mapsto (0, xy) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_2} : (x,y) \mapsto (xy, 0)$$

   on a
   $$\overline{x} = \frac{3}{4}\oint_{\partial D} \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dn} = -\frac{3}{4}\oint_{\partial D} xydx \qquad \text{et} \qquad \overline{y} = \frac{3}{4}\oint_{\partial D} \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dn} = \frac{3}{4}\oint_{\partial D} xydy$$

   (b) La frontière ∂D est composée de trois parties C_1, C_2 et C_3 :



correspondant respectivement aux trois paramétrisation ci-dessous :

$$\begin{array}{rcrcll} C_1 & : & \gamma_1(t) & = & (t, \sqrt{1+t}), & t \in [-1, 0] \\ C_2 & : & \gamma_2(t) & = & (t, \sqrt{1-t}), & t \in [0, 1] \\ C_3 & : & \gamma_3(t) & = & (t, 0), & t \in [-1, 1] \end{array}$$

(c) D'après les deux questions précédentes (et en prêtant attention à l'orientation des différents chemins), on a

$$\overline{y} = \frac{3}{4} \oint_{\partial D} xydy = -\frac{3}{4} \left(\int_{C_1} xydy + \int_{C_2} xydy - \int_{C_3} xydy \right)$$

Or

- la paramétrisation γ_1 donne

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} x_1(t) & = & t & \Rightarrow & x_1'(t) & = & 1 \\ y_1(t) & = & \sqrt{1+t} & \Rightarrow & y_1'(t) & = & \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}} \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{C_1} xydy &= \int_{-1}^{0} t.\sqrt{1+t}.\frac{1}{2\sqrt{1+t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} tdt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

- la paramétrisation γ_2 donne

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} x_2(t) & = & t & \Rightarrow & x_2'(t) & = & 1 \\ y_2(t) & = & \sqrt{1-t} & \Rightarrow & y_2'(t) & = & -\dfrac{1}{2\sqrt{1-t}} \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{C_2} xydy &= \int_{0}^{1} t.\sqrt{1-t}.\frac{-1}{2\sqrt{1-t}} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_{0}^{1} tdt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{0}^{1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

- la paramétrisation γ_3 donne

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} x_3(t) & = & t & \Rightarrow & x_3'(t) & = & 1 \\ y_3(t) & = & 0 & \Rightarrow & y_3'(t) & = & 0 \end{array} \right.$$

donc

$$\int_{C_3} xydy = 0$$

D'où

$$\overline{y} = -\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{3}{8}.$$

(d) Comme pour $\overline{y}$, en introduisant les paramétrisations γ_1, γ_2 et γ_3 dans l'expression de $\overline{x}$, on obtient

$$\overline{x} = \frac{3}{4}\left(\underbrace{\int_{-1}^{0} t\sqrt{1+t}dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} t\sqrt{1-t}dt}_{I_2} - 0\right)$$

Or en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans I_1, on montre que $I_1 = -I_2$ donc $\overline{x} = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $\overrightarrow{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = \gamma'(t)$ et $\overrightarrow{a}(t) = (x''(t), y''(t)) = \gamma''(t)$.
2. Par définition, le travail exercé par $\overrightarrow{F}$ sur la particule au cours du trajet est

$$W = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

Or, puisque $\overrightarrow{F} = -\nabla\Phi$, on a

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right)$$

La forme différentielle

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)dx - \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)dy = \frac{\partial(-\Phi)}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial(-\Phi)}{\partial y}(x,y)dy$$

est exacte, associée à la fonction $-\Phi$. Le travail exercé par $\overrightarrow{F}$ sur la particule ne dépend donc que des valeurs de $-\Phi$ en A et B :

$$W = -\Phi(B) - (-\Phi(A)) = \Phi(A) - \Phi(B).$$

3. Le PFD appliqué à la particule à l'instant t s'écrit

$$\overrightarrow{F}(x(t), y(t)) = m.\overrightarrow{a}(t) \iff \begin{cases} -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x(t), y(t)) = m.x''(t) & (L_1) \\ -\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x(t), y(t)) = m.y''(t) & (L_2) \end{cases}$$

et de $x'(t).(L_1) + y'(t).(L_2)$, on tire

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x(t), y(t)).x'(t) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x(t), y(t)).y'(t) = m.(x''(t).x'(t) + y''(t).y'(t))$$

4. En intégrant l'égalité précédente sur l'intervalle $[a, b]$, on obtient

$$-\int_a^b \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x(t), y(t)).x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x(t), y(t)).y'(t)\right) dt = m\int_a^b (x''(t).x'(t) + y''(t).y'(t))dt$$

$$\iff \Phi(A) - \Phi(B) = \frac{1}{2}m(x'(b)^2 + y'(b)^2 - x'(a)^2 - y'(a)^2)$$

$$\iff W = E_c(b) - E_c(a)$$

5. Si le travail est positif, le champs $\overrightarrow{F}$ fournit de l'énergie à la particule au cours de trajet. Il la "pousse". Sinon, si le travail est négatif, la force $\overrightarrow{F}$ freine la particule au cours du trajet.

⋆ ⋆
⋆