CONTRÔLE CONTINU

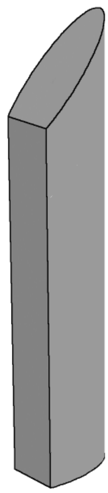
Compléments d'intégration

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Les piliers du pont J. Chaban-Delmas à Bordeaux semblent être taillées dans un cylindre de base ellipsoïdale.

Source : http ://www.frisou-frisou.com/wp-content/uploads/2013/01/Pont-Jacques-Chaban-Delmas1.jpg



Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on peut alors modélisé l'un de ces piliers par le cylindre C d'équation

$$E_C \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

coupé par le plan oblique P_1 d'équation

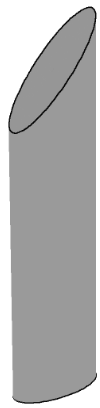
$$E_{P_1} \ : \ x + z = h - 2 \qquad (h > 0)$$

et le plan vertical P_2 d'équation

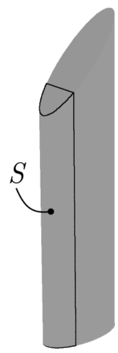
$$E_{P_2} \ : \ x = 1$$

1. *Volume du cylindre complet*
   On néglige pour l'instant la coupe verticale.
   (a) Exprimer le volume du cylindre biseauté à l'aide d'une intégrale double I_1.
   (b) Calculer I_1 à l'aide du changement de variable

$$\begin{cases} x &= 2r\cos(t) \\ y &= r\sin(t) \end{cases}$$



2. *Volume de la section verticale*
   (a) Décrire la section verticale S ôtée du cylindre à l'aide des coordonnées cartésiennes.
   (b) En déduire le volume de cette section sous la forme d'une intégrale triple I_2.
   (c) Calculer I_2 et en déduire le volume de chacun des piliers du pont.



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On assimile le plan géométrique $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$ via un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$. Pour $a, b \in \mathbb{R}_*^+$ fixés, on note $\mathcal{D}$ le domaine du plan défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$$

1. Dessiner $\mathcal{D}$.
2. Soit $\Phi\ :\ (x,y) \mapsto (r,t)$ le changement de variables défini par $\begin{cases} x(r,t) &= ar\cos t \\ y(r,t) &= br\sin t \end{cases}$
   (a) Décrire $\mathcal{D}$ à l'aide des nouvelles variables (r,t).
   (b) Calculer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale double.
   (c) Déterminer les coordonnées cartésiennes du centre de gravité $G = (\overline{x}, \overline{y})$ de $\mathcal{D}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 *Théorème de Huygens*
Soient D un domaine du plan et Δ une droite du plan.

On appelle *moment quadratique* de D selon l'axe Δ l'intégrale double $I_\Delta(D) = \displaystyle\iint_D d(M,\Delta)^2 dS$ où M parcourt l'ensemble des points du domaine D et $d(M,\Delta)$ représente la distance de M à l'axe Δ.

Montrer que si l'on note Δ_G l'axe du plan parallèle à Δ, passant par le centre de gravité G de D, alors

$$I_\Delta(D) = I_{\Delta_G}(D) + \mathcal{A}(D).d(\Delta, \Delta_G)^2$$

$\mathcal{A}(D)$ étant l'aire du domaine D.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) Le volume du cylindre complet correspond au volume sous la surface P_1 d'équation $z = h - 2 - x$ au dessus de l'ellipse du plan de base $\mathcal{E}$ d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Ainsi,

$$I_1 = \iint_{\mathcal{E}} (h - 2 - x)dxdy$$

(b) Si l'on pose

$$\begin{cases} x(r,t) & = & 2r\cos(t) \\ y(r,t) & = & r\sin(t) \end{cases}$$

on a $J(r,t) = 2r$ (soit en reconnaissant un changement de variables elliptique, soit en calcul la matrice jacobienne et son déterminant).
Par ailleurs, à l'aide de ces nouvelles variables, l'ellipse $\mathcal{E}$ est le domaine du plan de base défini par

$$\mathcal{E} = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (h - 2 - 2r\cos(t))2rdt \right) dr = \int_0^1 2r \left[ht - 2t - 2r\sin(t)\right]_0^{2\pi} dr \\ &= 2\int_0^1 r\left(2\pi h - 4\pi\right) dr = 4\pi(h-2)\int_0^1 rdr = 2\pi(h-2) \end{aligned}$$

2. (a) La section verticale ôtée du cylindre est l'ensemble des points $M = (x,y,z)$ de l'espace tels que

$$1 \leqslant x \leqslant 2, \quad -\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \quad 0 \leqslant z \leqslant h - 2 - x$$

(b) Le volume de cette section S est donc

$$\begin{aligned} I_2 = \iiint_S dV &= \int_1^2 \left(\int_0^{h-2-x} \left(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_1^2 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}(h - 2 - x)dx \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on pose $x = 2\cos(t)$. Ainsi, $dx = -2\sin(t)dt$ et

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sqrt{1 - \cos^2(t)}(h - 2 - 2\cos(t))(-\sin(t)dt) \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)(h - 2 - \cos(t))dt = 2(h-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)\sin^2(t)dt \\ &= 2(h-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos(2t)}{2}dt - 2\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = (h-2)\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{2}{3}.\frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} \\ &= (h-2)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

(c) Le volume de chaque pilier est donc

$$V = I_1 - I_2 = 2\pi(h-2) - (h-2)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = (h-2)\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Il s'agit d'un quart d'ellipse d'axes respectifs a et b.
2. On reconnaît ici le changement de variable elliptique adapté à l'ellipse étudiée. On calcule ou l'on retrouve le jacobien $J(r,t) = abr$. Par ailleurs, le quart d'ellipse est

$$\mathcal{D} = \left\{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leqslant r \leqslant 1,\; 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ainsi

$$A(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dS = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} abrdt\right) dt = \frac{\pi ab}{4}$$

(on reconnaît ici le quart de l'aire de l'ellipse).

3. Les coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ du centre de gravité du domaine $\mathcal{D}$ sont

$$\overline{x} = \frac{1}{A(\mathcal{D})} \iint xdxdy \qquad \text{et} \qquad \overline{x} = \frac{1}{A(\mathcal{D})} \iint xdxdy$$

En utilisant les nouvelles variables, on a

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{4}{\pi ab} \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} ar\cos(t) abrdt\right) dr \\ &= \frac{4a}{\pi} \left(\int_0^1 r^2 dr\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt\right) = \frac{4a}{3\pi}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \frac{4}{\pi ab} \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} br\sin(t) abrdt\right) dr \\ &= \frac{4b}{\pi} \left(\int_0^1 r^2 dr\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt\right) = \frac{4b}{3\pi}\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

On pose $d = d(\Delta, \Delta_G)$ et l'on note D_1 la partie de D se situant entre Δ et Δ_G.

Soit M un point du domaine D.
Si $M \in D_1$, on a

$$d(M,\Delta) + d(M,\Delta_G) = d \;\Rightarrow\; d(M,\Delta)^2 = (d - d(M,\Delta_G))^2 = d^2 - 2d.d(M,\Delta_G) + d(M,\Delta_G)^2$$

Sinon, on a

$$d(M,\Delta) = d + d(M,\Delta_G) \;\Rightarrow\; d(M,\Delta)^2 = (d + d(M,\Delta_G))^2 = d^2 + 2d.d(M,\Delta_G) + d(M,\Delta_G)^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}I_\Delta(D) &= \iint_D d(M,\Delta)^2 dS = \iint_{D_1} d(M,\Delta)^2 dS + \iint_{D\setminus D_1} d(M,\Delta)^2 dS \\ &= \iint_{D_1} (d^2 - 2d.d(M,\Delta_G) + d(M,\Delta_G)^2) dS + \iint_{D\setminus D_1} (d^2 + 2d.d(M,\Delta_G) + d(M,\Delta_G)^2) dS \\ &= \iint_{D_1} d^2 dS + \iint_{D\setminus D_1} d^2 dS + \iint_{D_1} d(M,\Delta_G)^2 dS + \iint_{D\setminus D_1} d(M,\Delta_G)^2 dS \\ &\quad + d.\left(\iint_{D\setminus D_1} d(M,\Delta_G) dS - \iint_{D_1} d(M,\Delta_G) dS\right) \\ &= \iint_D d^2 dS + \iint_D d(M,\Delta_G)^2 dS + d.\left(\iint_{D\setminus D_1} d(M,\Delta_G) dS - \iint_{D_1} d(M,\Delta_G) dS\right)\end{aligned}$$

Pour obtenir l'égalité cherchée, il reste à montrer que $\iint_{D \backslash D_1} d(M, \Delta_G) dS - \iint_{D_1} d(M, \Delta_G) dS = 0$, soit

$$\iint_{D \backslash D_1} d(M, \Delta_G) dS = \iint_{D_1} d(M, \Delta_G) dS$$

Or puisque Δ_G passe par le centre de gravité, la somme de toutes les distances à Δ_G depuis la gauche est égale à la somme de toutes les distances à Δ_G depuis la droite.

Pour montrer cela proprement, on peut par exemple placer le domaine D dans un repère orthonormé dont le centre est G est dont l'axe vertical est Δ_G. Ainsi

$$\forall M = (x, y), \qquad d(M, \Delta_G) = |x|$$

En supposant de plus que l'axe Δ passe à gauche de l'axe Δ_G, on a en particulier $d(M, \Delta_G) = -x$ pour $M \in D_1$ et $d(M, \Delta_G) = x$ pour $M \in D \backslash D_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint_{D \backslash D_1} d(M, \Delta_G) dS - \iint_{D_1} d(M, \Delta_G) dS &= \iint_{D \backslash D_1} x dS - \iint_{D_1} (-x) dS \\ &= \iint_{D \backslash D_1} x dS + \iint_{D_1} x dS = \iint_D x dS = \mathcal{A}(D) \times x_G \end{aligned}$$

Or G étant le centre du repère, on a $x_G = 0$ et

$$I_\Delta(D) = \iint_D d^2 dS + \iint_D d(M, \Delta_G)^2 dS = d^2 . \mathcal{A}(D) + I_{\Delta_G}(D)$$