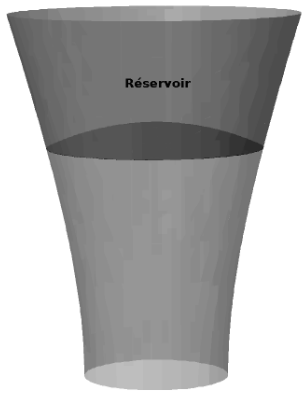
CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1



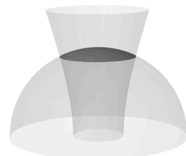
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, on considère un château d'eau correspondant à la représentation ci-contre.
Les parois du château d'eau suivent la surface d'équation

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - 3\frac{z^2}{100} = 1$$

entre les altitudes $z = 0$ et $z = 10m$.
Par ailleurs, le fond du réservoir n'est pas plat. Il suit la calotte sphérique issue de la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

1. *Volume du réservoir*
   (a) Montrer que le bas du réservoir se situe à l'altitude $z_{\min} \approx 6,34m$.
   (b) Déterminer le volume de la partie de l'hyperboloïde située entre les altitudes $z = z_{\min}$ et $z = 10m$ (on donnera le résultat à 10^{-2} près).
   (c) Montrer que la calotte sphérique contenue dans le réservoir (représentée ci-contre) est



$$\mathcal{C} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 6,34 \leqslant z \leqslant 7,\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{49 - z^2}\right\}$$

   et calculer son volume à 10^{-2} près.
   (d) Donner le volume du réservoir à 10^{-2} près.

2. En vue du dimensionnement du plancher, on souhaite en connaître la surface.
   (a) Montrer que la paramétrisation

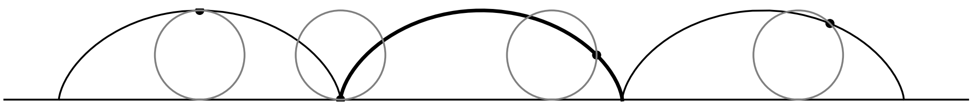
$$\begin{array}{rcccc} s & : & [0,360] \times [0,25] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \longmapsto & (7\cos(u)\sin(v), 7\sin(u)\sin(v), 7\cos(v)) \end{array}$$

   est une paramétrisation du plancher.

(b) Calculer la surface du plancher à 10^{-2} près (attention : les angles sont ici donnés en degrés).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On appelle cycloïde la courbe décrite par la valve d'une roue de vélo au cours d'un déplacement rectiligne.



Une paramétrisation d'une arche de cycloïde (correspondant à un tour de roue de rayon $a > 0$) est

$$(\mathcal{C}_a) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & a(t - \sin t) \\ y(t) & = & a(1 - \cos t) \end{array} \right. , \quad t \in [0, 2\pi].$$

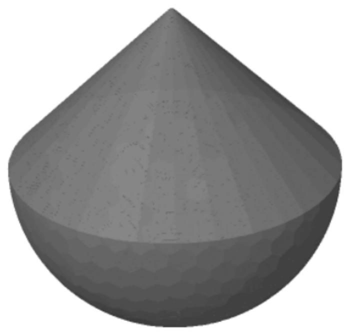
1. Calculer la longueur de la cycloïde $\mathcal{C}_a$ définie ci-dessus (on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 - \cos(t) = \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$).
2. À l'aide des formules de Green, calculer l'aire d'une arche de cycloïde.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, dans lequel on note

- $\mathcal{C}$ le cône d'équation $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$, limité par les plans $z = 0$ et $z = 1$, de masse volumique $\rho_{\mathcal{C}} = 1$,
- $\mathcal{S}$ la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ située dans le demi-espace $z \leqslant 0$, de masse volume $\rho_{\mathcal{S}} = 2$.



1. Déterminer la masse du cône $\mathcal{C}$ (on pourra s'appuyer sur les coordonnées cylindriques).
2. Donner (ou retrouver) la masse de la demi-sphère $\mathcal{S}$.
3. Déterminer le centre de gravité de l'ensemble $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ (on pourra commencer par déterminer les centres de gravités de chacune des parties en s'appuyant à chaque fois sur les coordonnées cylindriques relatives au repère $\mathcal{R}$).
4. Déterminer le moment quadratique de l'ensemble $\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ par rapport à l'axe (Oz) (chaque partie contribuant proportionnellement à sa masse). On s'attachera à donner le résultat sous la forme d'une somme d'intégrales triples (que l'on ne cherchera pas à calculer).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) Le bas du réservoir se situe à l'intersection des surfaces d'équations respectives

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-3\frac{z^2}{100}=1 \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2+z^2=49$$

Ainsi, tout point (x,y,z) de cette base doit vérifier le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 49 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-3\dfrac{z^2}{100} & = & 1 \end{array}\right.$$

En soustrayant une équation à l'autre, z étant positif, on obtient en particulier

$$\frac{28}{25}z^2=45 \iff z=\sqrt{\frac{25\times 45}{28}}\approx 6,34$$

(b) Le volume cherché peut être représenté par l'intégrale suivante :

$$V_{\mathcal{H}}=\iiint_{\mathcal{H}} dV$$

On peut, pour décrire $\mathcal{H}$ s'appuyer sur les coordonnées cylindriques. En effet, on peut voir l'hyperboloïde comme un empilement de disques dont le rayon r dépend de la hauteur z. Précisément, étant donné le lien existant entre les coordonnées cartésiennes (x,y,z) et cylindriques (r,θ,z) d'un point M de l'espace, on a

$$M\in\mathcal{H} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-3\frac{z^2}{100} & \leqslant & 1 \\ z_{\min}\leqslant z\leqslant 10 & & \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} r^2\leqslant 4+\frac{3}{25}z^2 \\ z_{\min}\leqslant z\leqslant 10 \end{array}\right.$$

Ainsi, la partie $\mathcal{H}$ cherchée est

$$\mathcal{H}=\left\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; z_{\min}\leqslant z\leqslant 10,\; 0\leqslant r\leqslant\sqrt{4+\frac{3}{25}z^2},\; 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}$$

et

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{H}} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_{6,34}^{10}\left(\int_0^{\sqrt{4+\frac{3}{25}z^2}} r\,dr\right)dz\right)d\theta \\ &= 2\pi\int_{6,34}^{10}\frac{4+\frac{3}{25}z^2}{2}dz \\ &= \pi\left[4z+\frac{z^3}{25}\right]_{6,34}^{10}\approx 139,63 \end{aligned}$$

(c) On peut encore utiliser les coordonnées cylindriques pour décrire la sphère intervenant dans la définition du réservoir. Il s'agit là encore d'un empilement de disque dont le rayon dépend de la hauteur z. Précisément, la calotte sphérique délimitant le fond du réservoir est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées cylindriques vérifient

$$\begin{cases} r^2 + z^2 \leqslant 49 \\ 6,34 \leqslant z \leqslant 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 & \leqslant & r & \leqslant & \sqrt{49 - z^2} \\ 6,34 & \leqslant & z & \leqslant & 7 \end{cases}$$

ce qui correspond bien à la description donnée.

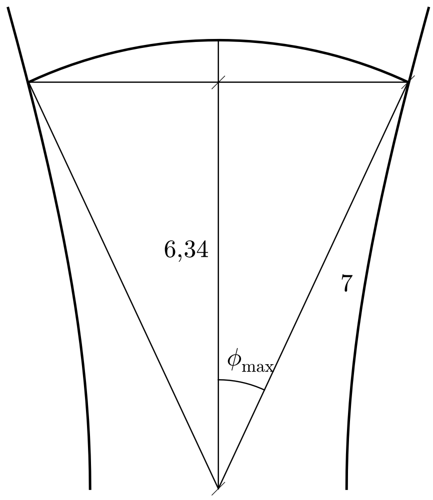
Le volume de cette calotte est donc

$$\begin{aligned} V_C = \iiint_C dV &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{6,34}^{7} \left(\int_0^{\sqrt{49-z^2}} r dr \right) dz \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_{6,34}^{7} \frac{49 - z^2}{2} dz = \pi \left[49z - \frac{z^3}{3} \right]_{6,34}^{7} \approx 9,28 \end{aligned}$$

(d) Le volume du réservoir est la différence des deux volumes calculés ci-dessus, soit

$$V_R \approx 139,63 - 9,28 \approx 130,35$$

2. (a) Cette paramétrisation est basée sur les coordonnées sphériques de l'espace. Ainsi, on peut vérifier que pour tout couple (u, v) le point $s(u, v)$ appartient à la sphère (i.e. les coordonnées cartésiennes $s(u, v)$ vérifient l'équation de la sphère). Par ailleurs, il reste à vérifier que les domaines associés respectivement à u et v permettent de se limiter à la calotte voulu. Le paramètre u correspondant à l'angle θ des coordonnées sphériques, il est libre sur tout un tour. Le paramètre v correspondant à l'angle ϕ, il doit, d'après le dessin ci-dessous représentant une coupe verticale du château d'eau au niveau de l'axe de symétrie, être situé entre 0 et $\phi_{\max} = \arccos\left(\frac{6,34}{7}\right) \approx 25°$:



(b) D'après les formules du cours, la mesure du fond du réservoir est donnée par

$$\mathcal{A}_C = \iint_C \left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

Or

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -7\sin u \sin v \\ 7\cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7\cos u \cos v \\ 7\sin u \cos v \\ -7\sin v \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -49\cos u \sin^2 v \\ -49 \sin u \sin^2 v \\ -49(\sin^2 u \sin v \cos v + \cos^2 \sin v \cos v) \end{pmatrix}$$
$$= -49 \sin v \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

D'où

$$\left\| \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v) \right\| = 49|\sin v|$$

et

$$\mathcal{A}_C = 49 \int_0^{360} \left(\int_0^{25} \sin v dv \right) du = 360(1 - \cos(25)) \times \frac{2\pi}{360} \approx 0,59$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Par définition, on a

$$\ell(\mathcal{C}_a) = \int_{\mathcal{C}_a} ||\overrightarrow{d\ell}|| = \int_{\mathcal{C}_a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

   En introduisant la paramétrisation donnée, on a

$$\begin{aligned}
\ell(\mathcal{C}_a) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\
&= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \quad \text{car } \tfrac{t}{2} \in [0,\pi] \text{ donc } \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) \geqslant 0 \\
&= 2a \left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8a
\end{aligned}$$

2. Par définition, on a

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dS$$

   où D désigne le domaine délimité par une arche. D'après les formules de Green, l'aire de D est également donnée par l'intégrale curviligne de la forme différentielle $xdy - ydx$ le long de la frontière de D parcourue dans le sens trigonométrique. Or cette frontière est constituée de l'arche $\mathcal{C}_a$ et du segment horizontal $[AB]$ formant la base de l'arche. Pour respecter le sens de parcours, on a donc

$$\mathcal{A}(D) = \int_{[AB]} xdy - ydx - \int_{\mathcal{C}_a} xdy - ydx$$

D'autre part, si $A = (0,0)$, d'après la paramétrisation de $\mathcal{C}_a$, on a $B = (2a\pi, 0)$. Une paramétrisation du segment $[AB]$ est donc

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_2 & : & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (x_2(t), y_2(t)) = (at, 0) \end{array}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{[AB]} xdy - ydx = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_a} xdy - ydx &= \int_0^{2\pi} (a(t-\sin t).a\sin t - a(1-\cos t).a(1-\cos t))\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (t\sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t)dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (t\sin t + 2\cos t - 2)dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t\sin t$ s'intègre par parties en posant

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \Rightarrow & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & \sin t & \Rightarrow & v(t) & = & -\cos t \end{array} \right.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi} t\sin t dt = [-t\cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = -2\pi$$

Ainsi

$$\int_{\mathcal{C}_a} xdy - ydx = a^2(-2\pi + [2\sin t - 2t]_0^{2\pi}) = -6\pi a^2$$

et

$$\mathcal{A}(D) = 6\pi a^2$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. En notant (r, θ, z) les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace, l'équation du cône devient

$$x^2 + y^2 = (1-z)^2 \iff r^2 = (1-z)^2 \iff r = 1-z$$

Les points du cône sont alors les points vérifiant

$$\mathcal{C} = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ 0 \leqslant r \leqslant 1-z\right\}$$

D'où

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}} &= \iiint_{\mathcal{C}} \rho_{\mathcal{C}} dV = \iiint_{\mathcal{C}} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} r dr \right) dz \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1-z} dz \\ &= \pi \int_0^1 (1-z)^2 dz \\ &= \pi \left[-\frac{(1-z)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

2.
$$M_{\mathcal{S}} = \iiint_{\mathcal{S}} \rho_{\mathcal{S}} dV = 2 \iiint_{\mathcal{S}} dV = \frac{4\pi}{3}$$

3. Les centres de gravité de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont tous deux situés sur l'axe (Oz). Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
z_{G_{\mathcal{C}}} &= \frac{1}{M_{\mathcal{C}}} \iiint_{\mathcal{C}} z\rho_{\mathcal{C}} r dr d\theta dz \\
&= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} rzdr \right) dz \right) d\theta \\
&= 6 \int_0^1 z \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{1-z} dz \\
&= 3 \int_0^1 z(1-z)^2 dz = 3 \int_0^1 z - 2z^2 + z^3 dz \\
&= 3 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
z_{G_{\mathcal{S}}} &= \frac{1}{M_{\mathcal{S}}} \iiint_{\mathcal{S}} z\rho_{\mathcal{S}} r dr d\theta dz \\
&= \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} rzdr \right) dz \right) d\theta \\
&= 3 \int_{-1}^0 z \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz \\
&= \frac{3}{2} \int_{-1}^0 z(1-z^2) dz = \frac{3}{2} \int_{-1}^0 z - z^3 dz \\
&= \frac{3}{2} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Pour finir, on a

$$\begin{aligned}
z_{\mathcal{C}\cup\mathcal{S}} &= \frac{\iiint_{\mathcal{C}\cup\mathcal{S}} z.\rho(M) dV}{\iiint_{\mathcal{C}\cup\mathcal{S}} \rho(M) dV} \\
&= \frac{\iiint_{\mathcal{C}} z.\rho_{\mathcal{C}} dV + \iiint_{\mathcal{S}} z.\rho_{\mathcal{S}} dV}{\iiint_{\mathcal{C}} \rho_{\mathcal{C}} dV + \iiint_{\mathcal{S}} \rho_{\mathcal{S}} dV} \\
&= \frac{M_{\mathcal{C}}.z_{G_{\mathcal{C}}} + M_{\mathcal{S}}.z_{G_{\mathcal{S}}}}{M_{\mathcal{C}} + M_{\mathcal{S}}} = \frac{\frac{\pi}{3}.\frac{1}{4} + \frac{4\pi}{3}.(-\frac{3}{8})}{\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{5}{12}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
I_{(Oz)} &= \iiint_{\mathcal{C}\cup\mathcal{S}} \rho(M) d(M,(Oz))^2 dV \\
&= \iiint_{\mathcal{C}} \rho_{\mathcal{C}} r^2.rdrd\theta dz + \iiint_{\mathcal{S}} \rho_{\mathcal{S}} r^2.rdrd\theta dz \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-z} r^3 dr \right) dz \right) d\theta + 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^3 dr \right) dz \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{1-z} dz + 4\pi \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-z)^4 dz + \pi \int_0^1 (1-z^2)^2 dz \\
&= \frac{\pi}{4} \left[-\frac{(1-z)^5}{5} \right]_0^1 + \pi \int_0^1 (1-2z^2+z^4) dz \\
&= \frac{\pi}{20} + \pi \left[z - 2\frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{20} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{7\pi}{12}
\end{aligned}
$$

⋆ ⋆
⋆