# CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

---

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

---

**Exercice 1** Soient $\alpha \neq 0$ et $D$ le domaine du plan $(xOy)$ délimité par les courbes d'équations

$$\mathcal{C}_0 \,:\, y = 1 - x^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_\alpha \,:\, y = (1-\alpha)(1-x^2)$$

et les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$.

1. Tracer le domaine $D$ dans les cas $\alpha = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -1$.
2. Exprimer l'aire de $D$ sous la forme d'une intégrale double et la calculer (on pourra distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes $(\overline{x}, \overline{y})$ du centre de gravité $G$ de $D$ (on pourra là encore distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).
4. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $G$ se trouve à l'extérieur de $D$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

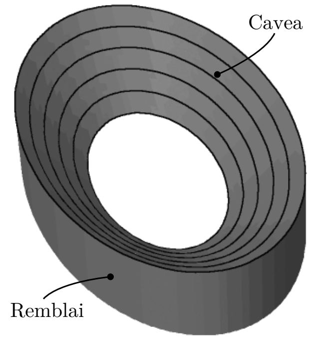
**Exercice 2**

Certains amphithéâtres antiques, dits *massifs* sont constitués de gradins (la *cavea*) de forme ellipsoïdale et portée par un remblai (naturel ou non).

On envisage ainsi la création d'un amphithéâtre massif de hauteur 1 unité, inscrit dans un cylindre de section ellipsoïdale d'équation

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

entre les altitudes $z = 0$ et $z = 1$.




On souhaite en outre que la *cavea* suive le cône renversé d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = (z+1)^2$$

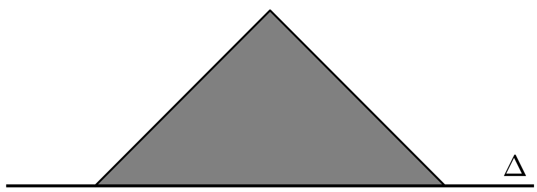
1. Calculer le volume de remblai contenu sous la *cavea* (on supposera que les parois du remblai sont verticales et l'on pourra s'appuyer sur le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4r\cos\theta \\ y & = & 2r\sin\theta \\ z & = & z \end{array}\right.$$

2. Calculer la surface totale de gradin ainsi disponible.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** 1. Calculer le moment d'inertie du triangle rectangle isocèle ci-dessous par rapport à l'axe $\Delta$




2. Calculer le moment d'inertie du cône de révolution ci-contre par rapport à son axe de symétrie.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 4**

1. Calculer le flux *sortant* du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{F} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x^2, y^2) \end{array}$$

   à travers le cercle $\mathcal{C}$ d'équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

   à l'aide d'une intégrale curviligne.

   **Note** : on pourra commencer par effectuer le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u & = & x-a \\ v & = & y-b \end{array} \right.$$

   afin de translater le centre du repère au centre du cercle $\mathcal{C}$.

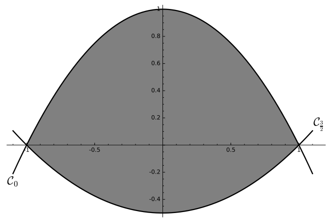
2. Retrouver ce résultat à l'aide d'une intégrale double.

$\star \; \star$
$\star$

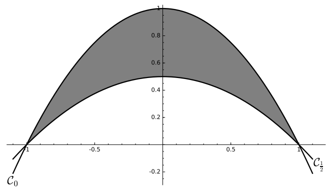
# CORRECTION

**Exercice 1 :**

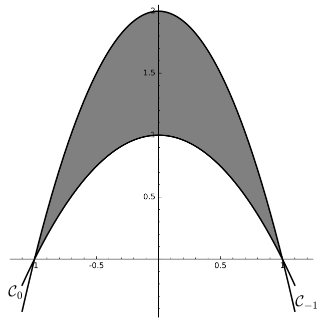
1.



$\alpha = \dfrac{3}{2}$



$\alpha = \dfrac{1}{2}$



$\alpha = -1$

2. Pour tout $\alpha \neq 0$, le domaine $D$ peut être décrit par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ (1-\alpha)(1-x^2) \leqslant y \leqslant 1-x^2\} \quad \text{si } \alpha > 0$$

et

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 1-x^2 \leqslant y \leqslant (1-\alpha)(1-x^2)\} \quad \text{si } \alpha < 0$$

Ainsi, l'aire de $D$ est

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dS = \int_{-1}^{1} \left( \int_{(1-\alpha)(1-x^2)}^{1-x^2} dy \right) dx$$

si $\alpha > 0$ et

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dS = \int_{-1}^{1} \left( \int_{1-x^2}^{(1-\alpha)(1-x^2)} dy \right) dx$$

si $\alpha < 0$.

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) &= \int_{-1}^{1} \left| \int_{(1-\alpha)(1-x^2)}^{1-x^2} dy \right| dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left| (1-\alpha)(1-x^2) - (1-x^2) \right| dx \\
&= |\alpha| \int_{-1}^{1} (1-x^2) dx = |\alpha| \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{4}{3}|\alpha|
\end{aligned}$$

3. Par symétrie, on a $\overline{x} = 0$. D'autre part, si $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D y dS \\
&= \frac{3}{4|\alpha|} \int_{-1}^{1} \left( \int_{(1-\alpha)(1-x^2)}^{1-x^2} y dy \right) dx \\
&= \frac{3}{4\alpha} \int_{-1}^{1} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{(1-\alpha)(1-x^2)}^{1-x^2} dx \\
&= \frac{3}{8\alpha} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 - (1-\alpha)^2 (1-x^2)^2) dx \\
&= \frac{3(1-(1-\alpha)^2)}{8\alpha} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 dx \\
&= \frac{3(2-\alpha)}{8} \int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4) dx \\
&= \frac{3(2-\alpha)}{8} \left[ x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{3(2-\alpha)}{8} \frac{16}{15} = \frac{4-2\alpha}{5}
\end{aligned}$$

et pour $\alpha < 0$, on a

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D y dS \\
&= \frac{3}{4|\alpha|} \int_{-1}^{1} \left( \int_{1-x^2}^{(1-\alpha)(1-x^2)} y dy \right) dx \\
&= -\frac{3}{4\alpha} \int_{-1}^{1} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{1-x^2}^{(1-\alpha)(1-x^2)} dx \\
&= -\frac{3((1-\alpha)^2-1)}{8\alpha} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 dx \\
&= \frac{4-2\alpha}{5}
\end{aligned}$$

4. Pour $\alpha > 0$, $G$ est à l'extérieur de $D$ si et seulement si $\overline{y}$ est inférieur à l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_\alpha$ d'abscisse 0, soit $1-\alpha$. Or

$$\frac{4-2\alpha}{5} < 1-\alpha \iff 4-2\alpha < 5-5\alpha \iff 3\alpha < 1 \iff 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

De même, pour $\alpha < 0$, $G$ est à l'extérieur de $D$ si et seulement si $\overline{y}$ est inférieur à l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_0$ d'abscisse 0 soit 1. Or

$$\frac{4-2\alpha}{5} < 1 \iff 4-2\alpha < 5 \iff -\frac{1}{2} < \alpha < 0$$

Ainsi, $G$ est à l'extérieur de $D$ pour tout $\alpha \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}[\setminus\{0\}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer le volume de remblai nécessaire. L'une d'elle consiste à soustraite au volume total du cylindre le volume du cône tronqué. Ainsi,
   - Le cylindre est
   $$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leqslant 1, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$
   et son volume est
   $$V_{\mathcal{C}} = \iiint_{\mathcal{C}} dV$$
   Le calcul de cette intégrale triple se fait à l'aide du changement de variable "psedo-cylindrique"
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4r\cos\theta \\ y & = & 2r\sin\theta \\ z & = & z \end{array}\right.$$
   En effet, à l'aide de ces nouvelles coordonnées $(r, \theta, z)$, on a
   $$\mathcal{C} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant 1, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$
   Par ailleurs, le jacobien de ce changement de variable est
   $$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} 4\cos\theta & -4r\sin\theta & 0 \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8r$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} V_{\mathcal{C}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 8r dr d\theta dz \\ &= 8\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 dz\right)\left(\int_0^1 r dr\right) = 8\pi \end{aligned}$$
   - Le cône renversé est par définition
   $$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant (z+1)^2, \ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$
   À l'aide des nouvelles coordonnées $(r, \theta, z)$, on a
   $$\frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant (z+1)^2 \Longleftrightarrow 4r^2 \leqslant (z+1)^2 \Longleftrightarrow 0 \leqslant r \leqslant \frac{z+1}{2}$$
   D'où
   $$\mathcal{R} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant z \leqslant 1, \ 0 \leqslant r \leqslant \frac{z+1}{2}\right\}$$

Ainsi, le volume de $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}
V_{\mathcal{R}} = \iiint_{\mathcal{R}} dV &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{z+1}{2}} 8r dr \right) dz \right) d\theta \\
&= 16\pi \int_0^1 \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^{\frac{z+1}{2}} dz \\
&= 8\pi \int_0^1 \left( \frac{z+1}{2} \right)^2 dz \\
&= 2\pi \int_0^1 (z^2 + 2z + 1) dz \\
&= 2\pi \left[ \frac{z^3}{3} + z^2 + z \right]_0^1 = \frac{14\pi}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, le volume de remblai est

$$V_{\text{tot}} = 8\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

2. Par définition, la surface de gradin disponible est la mesure de la surface $\mathcal{G}$ d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = (z+1)^2$$

délimitée par les plans horizontaux d'altitudes $z = 0$ et $z = 1$. On obtient donc cette mesure par une intégrale de surface :

$$S_{\mathcal{G}} = \iint_{\mathcal{G}} dS$$

Pour calculer cette intégrale de surface, il nous faut une paramétrisation de $\mathcal{G}$, que l'on peut là encore construire à partir du changement de variables donné à la question précédente. Précisément, les points de la surface $\mathcal{G}$ sont les points de l'espace dont les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ vérifient

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = (z+1)^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{z+1}{2}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

On peut alors exprimer ces coordonnées cartésiennes à l'aide des paramètres $\theta$ et $z$ du nouveau système de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(\theta, z) & = & 2(z+1)\cos\theta \\ y(\theta, z) & = & (z+1)\sin\theta \\ z(\theta, z) & = & z \end{array} \right. \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

En un point $M(\theta, z)$ de $\mathcal{G}$, un vecteur normal est alors

$$\overrightarrow{N}(\theta, z) = \begin{pmatrix} -2(z+1)\sin\theta \\ (z+1)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z+1)\cos\theta \\ 2(z+1)\sin\theta \\ -2(z+1) \end{pmatrix}$$

dont la norme est

$$||\overrightarrow{N}(\theta, z)|| = (z+1)\sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta + 4} = (z+1)\sqrt{5 + 3\sin^2\theta}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_{\mathcal{G}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (z+1)\sqrt{5+3\sin^2\theta}\,d\theta dz = \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{5+3\sin^2\theta}\,d\theta\right)\left(\int_0^1 (z+1)dz\right) \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{5+3\sin^2\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. L'inertie du triangle $T$ par rapport à $\Delta$ est, par définition,

$$I_\Delta = \iint_T d(M,\Delta)^2 dS$$

Pour pouvoir calculer cette intégrale double, il faut commencer par fixer un repère du plan et nommer les grandeurs caractéristiques. Ainsi, fixons le centre du repère au milieu de l'hypoténuse $O$ du triangle rectangle, prenons l'axe $\Delta$ pour axe des abscisses et la perpendiculaire à $\Delta$ passant par $O$ pour axe des ordonnées et notons $a$ la longueur d'un petit coté et $h = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dans ce repère, les sommets du triangles ont pour coordonnées respectives

$$A = (h,0)\,, \quad B = (0,h)\,, \quad C = (-h,0)$$

Le triangle $T$ peut alors être vu comme la réunion $T = T_1 \cup T_2$ où

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; -1 \leqslant x \leqslant 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant x+h\}$$

et

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant h-x\}$$

Par ailleurs, l'axe $\Delta$ étant par construction l'axe des abscisses du repère, la distance $d(M,\Delta)$ n'est autre que l'ordonnée $|y|$ du point $M = (x,y)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_\Delta &= \iint_{T_1} d(M,\Delta)^2 dS + \iint_{T_2} d(M,\Delta)^2 dS \\
&= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+h} y^2 dy\right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{h-x} y^2 dy\right) dx \\
&= \int_{-1}^0 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{x+h} dx + \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{h-x} dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^0 (x+h)^3 dx + \int_0^1 (h-x)^3 dx\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\left[\frac{(x+h)^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{(h-x)^4}{4}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(h^4 - (h-1)^4 - (h-1)^4 + h^4\right) \\
&= \frac{1}{6}(h^4 - (h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h + 1)) \\
&= \frac{4h^3 - 6h^2 + 4h - 1}{6}
\end{aligned}$$

2. Comme pour la question précédente, commençons par fixer un repère. Puisque l'on va travailler dans un cylindre, les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ semblent indiquées. Or dans ces coordonnées, $r$ représente la distance à l'axe vertical. En prenant alors l'axe de symétrie $\Delta_S$ du cylindre pour axe vertical, on obtient une expression immédiate de la distance à $\Delta_S$ : $d(M, \Delta_S) = r$. D'autre part, en notant $R$ le rayon du disque donnant la section du cylindre et $h$ sa hauteur, dans ce système de coordonnées, on a

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant R, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant z \leqslant h\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{\Delta_S} &= \iiint_{\mathcal{C}} d(M, \Delta_S)^2 dV = \iiint_{\mathcal{C}} r^2 r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^h \left( \int_0^R r^3 dr \right) dz \right) d\theta = \frac{\pi h R^4}{2} \end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 4** :

1. Après translation, les problème revient à déterminer le flux du champ

$$\tilde{F}(u, v) = ((u + a)^2, (v + b)^2)$$

à travers la courbe d'équation $u^2 + v^2 = R^2$. Or une paramétrisation de $\mathcal{C}$ via les coordonnées $(u, v)$ est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & R\cos t \\ v(t) & = & R\sin t \end{array} \right. , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Le vecteur normal sortant de $\mathcal{C}$ en chaque point $M(u(t), v(t))$ est alors $\overrightarrow{dn} = (R\cos t, R\sin t)dt$ et le flux cherché est

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{\mathcal{C}} \tilde{F}(u(t), v(t)) \cdot \overrightarrow{dn} \\ &= \int_0^{2\pi} (R\cos t + a)^2 . R\cos t + (R\sin t + b)^2 . R\sin t \ dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^3 \cos^3 t + 2aR^2 \cos^2 t + a^2 R \cos t + R^3 \sin^3 t + 2bR^2 \sin^2 t + b^2 R \sin t \ dt \end{aligned}$$

Par symétrie, seules les puissances paires des fonctions sinus et cosinus produisent des termes non nuls lorsqu'on les intègre entre 0 et $2\pi$. Ainsi

$$\begin{aligned} \varphi &= R^2 \int_0^{2\pi} 2a\cos^2 t + 2b\sin^2 t \ dt \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} a(1 + \cos(2t)) + b(1 - \cos(2t)) \ dt \\ &= R^2 \left[ (a + b)t + \frac{a - b}{2} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi(a + b)R^2 \end{aligned}$$

2. On peut également calculer ce flux à l'aide de la formule de Green : $\varphi = \iint_D \mathrm{div}\tilde{F} dS$ où $D$ est le disque dont $\mathcal{C}$ est la frontière. Or ici,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\tilde{F}(u,v) &= \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial v}(u,v)\\ &= 2(u+a) + 2(v+b)\end{aligned}$$

D'où

$$\varphi = 2\iint_D (u+v+a+b)dudv$$

En passant aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} u &= r\cos t\\ v &= r\sin t\end{cases}$$

on a $D = \{(r,t) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$, $dS = rdrdt$ et

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R (r(\cos t + \sin t) + a + b)r\ dr\right)dt\\ &= 2\cancel{\left(\int_0^{2\pi}(\cos t + \sin t)dt\right)}\left(\int_0^R r^2 dr\right) + 2(a+b)\int_0^{2\pi} dt.\int_0^R rdr\\ &= 2\pi(a+b)R^2\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆