CONTRÔLE CONTINU

Logique, ensemble, calcul algébrique.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1. On souhaite montrer ici que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (a) Faire un dessin illustrant cette propriété.
   (b) Montrer que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (c) Montrer que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.
   (d) Conclure.
2. Montrer de même que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs.
   (a) Le carré de tout nombre réel est positif.
   (b) Certains nombres réels sont strictement supérieurs à leur carré.
   (c) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

2. Soient E et F deux ensembles et f et g deux fonctions de E dans F. Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs.
   (a) f est injective.
   (b) g est surjective.
   (c) $f = g$ (on rappelle que deux fonctions sont égales si les images respectives de tout élément de l'ensemble de départ par chacune d'entre elle sont égales).
   (d) $f \neq g$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient k et n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. Montrer que $k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$
2. En déduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} k.\binom{n}{k} = n.2^{n-1}$$

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$ et on note :

$$\mathcal{P}(n)\ :\ S_n = (n+1)! - 1$$

1. Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Retrouver le résultat précédent sans récurrence. On pourra effectuer un décalage d'indice dans la somme S_n et mettre en évidence une somme télescopique.

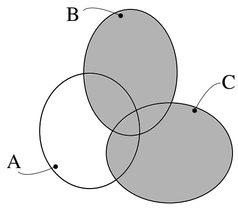
$\star\ \star$

$\star$

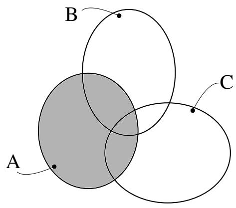
CORRECTION

Exercice 1 :

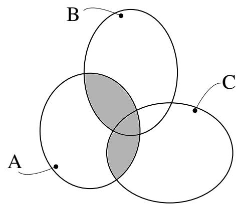
1. (a)



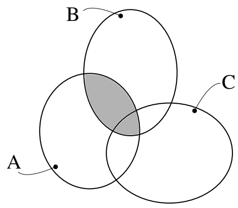
$B \cup C$



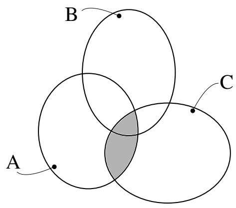
A



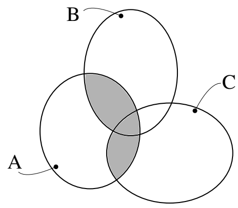
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cap C$



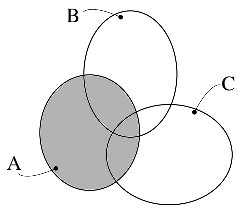
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. On a donc $x \in A$ et soit $x \in B$, soit $x \in C$.
— Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
— Sinon, $x \in C$ et donc $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Dans tous les cas, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ donc $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

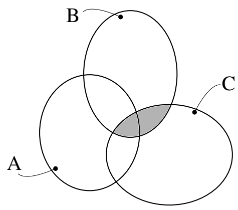
(c) Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
— Soit $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B \subset B \cup C$.
— Soit $x \in A \cap C$ donc $x \in A$ et $x \in C \subset B \cup C$.
Dans tous les cas, $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Donc x appartient à l'intersection $A \cap (B \cup C)$.

(d) Chacun des deux ensembles $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ étant inclus l'un dans l'autre, ils sont égaux.

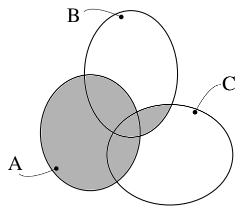
2. (a)



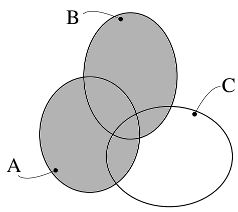
A



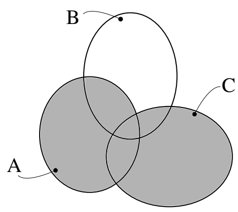
$B \cap C$



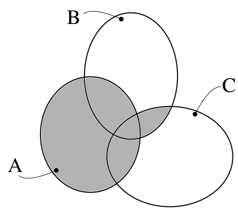
$A \cup (B \cap C)$



$A \cup B$



$A \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Soit $x \in A \cup (B \cap C)$.
— Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
— Sinon, $x \in B \subset A \cup B$ et $x \in C \subset A \cup C$.
Dans tous les cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. cqfd.

(c) Montrer réciproquement que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.
Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
— Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$.
— Sinon, puisque $x \in A \cup B$, alors $x \in B$ et puisque $x \in A \cup C$, alors $x \in C$. Mais alors $x \in B \cap C$.
Dans tous les cas, x appartient soit à A, soit à $B \cap C$.

(d) Chacun des deux ensembles étant inclus l'un dans l'autre, ces deux ensembles sont égaux.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 :

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ x > x^2$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists m \in \mathbb{Z} \ / \ m > n$.

2. (a) $\left\{ \begin{array}{l} \forall (x,y) \in E^2,\ (x \neq y) \ \Rightarrow \ f(x) \neq f(y) \\ \text{ou} \\ \forall (x,y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \ \Rightarrow \ x = y \end{array} \right.$

(b) $\forall y \in F,\ \exists x \in E\ /\ y = g(x)$.

(c) $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

(d) $\exists x \in E\ /\ f(x) \neq g(x)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned} k.\binom{n}{k} &= k.\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k.n!}{k.(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} n.\binom{n-1}{k-1} &= n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n.(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Donc $k.\binom{n}{k} = n.\binom{n-1}{k-1}$.

2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k.\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n.\binom{n-1}{k-1} && \text{d'après la question précédente} \\ &= n.\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} && \text{par un décalage d'indices} \\ &= n.\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}.1^{n-1-k}.1^{k} \\ &= n.(1+1)^{n-1} && \text{d'après le binôme de Newton} \\ &= n.2^{n-1} \end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. (a) Initialisation : pour $n = 1$, on a d'une part

$$\sum_{k=0}^{1} k.k! = 0.0! + 1.1! = 1$$

et d'autre part

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(b) Hérédité : supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k.k! &= \sum_{k=0}^{n} k.k! + (n+1).(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)! \times (1 + (n+1)) - 1 \\
&= (n+1)! \times (n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.

(c) Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k.k! &= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1).(k-1)! \qquad \text{par décalage d'indice} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k.(k-1)! - (k-1)! \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k! - (k-1)!
\end{aligned}$$

On reconnaît ici une somme télescopique avec $v_k = k!$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} k.k! = v_{n+1} - v_1 = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

⋆ ⋆
⋆