CONTRÔLE CONTINU

Logique, ensemble, calcul algébrique.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on appelle *différence symétrique* de A est B, la partie de E notée $A\Delta B$ et définie par

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

1. Représenter graphiquement la différence symétrique.
2. Pour toute partie $A \in E$, simplifier les expressions suivantes (on fera apparaître clairement les calculs) :
$$A\Delta E, \quad A\Delta\emptyset, \quad A\Delta A, \quad A\Delta\overline{A}$$
3. En s'appuyant sur la distributivité des opérations $\cap$ et $\cup$ l'une sur l'autre, montrer que
$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$
Indication : on rappelle que
$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad A\backslash B = A \cap \overline{B}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. *Questions de cours*
Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux ensembles et $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application.
   (a) Donner la définition de "φ est injective" à l'aide des quantificateurs.
   (b) Donner la définition de "φ est surjective" à l'aide des quantificateurs.

2. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$.
   (a) Donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de l'application h.
   (b) Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
   (c) Montrer que si f et g sont surjectives, alors h est surjective.
   (d) Montrer que si h est injective, alors f est injective.

(e) Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^*$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} f(k) \qquad \text{et} \qquad P_N = \prod_{k=1}^{N} f(k)$$

1. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m < n$.
   (a) Exprimer à l'aide des sommes S_n et S_m la somme $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} f(k)$.
   (b) Exprimer à l'aide des produits P_n et P_m le produit $\displaystyle\prod_{k=m+1}^{n} f(k)$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que

$$\sum_{k=n}^{2n} k = 3.\frac{n(n+1)}{2}$$

3. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Montrer que

$$\prod_{k=m}^{n} k = \binom{n}{m-1}.(n-m+1)!$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soient a, b, c trois réels et n un entier naturel.

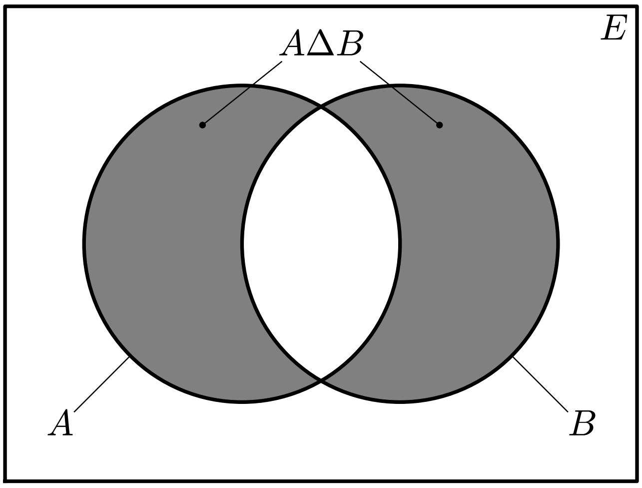
1. À l'aide du binôme de Newton, exprimer la quantité $(a+b+c)^n$ sous la forme d'une <u>double</u> somme.
2. Développer la double somme obtenue à la question précédente dans le cas $n = 2$.
3. Déterminer le coefficient de $a^2b^2c^2$ dans le développement de $(a+b+c)^6$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1.



2. Soient E un ensemble et A une partie de E. On a

$$\begin{array}{rcccccc} A\Delta E & = & (A\cup E)\backslash(A\cap E) & = & E\backslash A & = & \overline{A} \\ A\Delta\emptyset & = & (A\cup\emptyset)\backslash(A\cap\emptyset) & = & A\backslash\emptyset & = & A \\ A\Delta A & = & (A\cup A)\backslash(A\cap A) & = & A\backslash A & = & \emptyset \\ A\Delta\overline{A} & = & (A\cup\overline{A})\backslash(A\cap\overline{A}) & = & E\backslash\emptyset & = & E \end{array}$$

3. Pour toutes parties A et B de E, on a

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\cup B)\backslash(A\cap B) \\ &= (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} \\ &= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) \\ &= \big[(A\cup B)\cap\overline{A}\big]\cup\big[(A\cup B)\cap\overline{B}\big] \\ &= [\underbrace{(A\cap\overline{A})}_{=\emptyset}\cup(B\cap\overline{A})]\cup[(A\cap\overline{B})\cup\underbrace{(B\cap\overline{B})}_{=\emptyset}] \\ &= \big[B\cap\overline{A}\big]\cup\big[A\cap\overline{B}\big] \\ &= (B\backslash A)\cup(A\backslash B) \end{aligned}$$

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 :

1. (a) $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est injective si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \;\Rightarrow\; x = y$$

(b) $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est surjective si et seulement si

$$\forall y \in \mathcal{F}, \quad \exists x \in \mathcal{E} \;/\; y = \varphi(x)$$

2. (a) La fonction h est une application de E dans G.

(b) On suppose ici que f et g sont injective. Alors pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) = h(y) &\;\Rightarrow\; g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\;\Rightarrow\; f(x) = f(y) \qquad \text{car } g \text{ est injective} \\ &\;\Rightarrow\; x = y \qquad\qquad\;\; \text{car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

Donc h est injective.

(c) On suppose ici que f et g sont surjective. Soit alors $z \in G$.

— Puisque $g : F \to G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
— Puisque $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Autrement dit, il existe $x \in E$ tel que

$$h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Ainsi, tout élément $z \in G$ est l'image par h d'un élément de E et la fonction h est donc surjective.

(d) On suppose ici que h est injective et l'on souhaite montrer qu'alors f est également injective. On considère donc $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. On a alors :

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; g(f(x)) = g(f(y)) \;\Rightarrow\; h(x) = h(y)$$

Mais h étant injective, on a

$$h(x) = h(y) \;\Rightarrow\; x = y$$

Autrement dit,

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$$

et la fonction f est injective.

(e) On suppose ici que h est surjective et l'on souhaite montrer que la fonction g est également surjective. On considère donc $z \in G$. L'application $h : E \to G$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.
Autrement dit, $z \in G$ est l'image par g de $f(x) \in F$ et l'application g est surjective.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) On a
$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{m} f(k) = S_n - S_m$$

(b) On a
$$\prod_{k=m+1}^{n} f(k) = \frac{\prod_{k=0}^{n} f(k)}{\prod_{k=0}^{m} f(k)} = \frac{P_n}{P_m}$$

2. En s'appuyant sur la formule $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n} k &= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n}{2}(4n+2-n+1) = \frac{n}{2}(3n+3) \\ &= 3.\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

3. On a ici
$$\begin{aligned}\prod_{k=m}^{n} k = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{m-1} k} &= \frac{n!}{(m-1)!} \\ &= \frac{n!}{(m-1)!(n-(m-1))!}.(n-m+1)! \\ &= \binom{n}{m-1}(n-m+1)!\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. D'après le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n = ((a+b)+c)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a+b)^k.c^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j.b^{k-j}\right)c^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a^j.b^{k-j}.c^{n-k}\end{aligned}$$

2. Pour $n=2$, on a

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{2}{k}\binom{k}{j}a^j.b^{k-j}.c^{2-k}\\
&= \sum_{j=0}^{0}\binom{2}{0}\binom{0}{j}a^j.b^{0-j}.c^{2-0} && (k=0)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{1}\binom{2}{1}\binom{1}{j}a^j.b^{1-j}.c^{2-1} && (k=1)\\
&\quad+\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{2}\binom{2}{j}a^j.b^{2-j}.c^{2-2} && (k=2)\\
&= \underbrace{\binom{2}{0}\binom{0}{0}a^0.b^0.c^2}_{j=0}\\
&\quad+\underbrace{\binom{2}{1}\binom{1}{0}a^0.b^{1-0}.c^1}_{j=0}+\underbrace{\binom{2}{1}\binom{1}{1}a^1.b^{1-1}.c^1}_{j=1}\\
&\quad+\underbrace{\binom{2}{2}\binom{2}{0}a^0.b^{2-0}.c^0}_{j=0}+\underbrace{\binom{2}{2}\binom{2}{1}a^1.b^{2-1}.c^0}_{j=1}+\underbrace{\binom{2}{2}\binom{2}{2}a^2.b^{2-2}.c^0}_{j=2}\\
&= c^2+2bc+2ac+b^2+2ab+a^2\end{aligned}$$

3. D'après la formule générale ci-dessus, le coefficient de $a^2b^2c^2$ dans le développement de

$(a+b+c)^6$ est $\binom{n}{k}\binom{k}{j}$ pour

$$\left\{\begin{array}{lcl} n & = & 6 \\ j & = & 2 \\ k-j & = & 2 \\ n-k & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} n & = & 6 \\ j & = & 2 \\ k & = & 4 \end{array}\right.$$

Le document cherché est donc

$$\binom{6}{4}.\binom{4}{2} = \frac{6!}{4!(4-2)!}.\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{6\times 5}{2}.\frac{4\times 3}{2} = 90$$

⋆ ⋆
⋆