CONTRÔLE CONTINU

Logique, ensembles, calcul algébrique.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On se place dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on assimile au plan euclidien muni d'un repère orthonormé et l'on note

$$F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leqslant 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant x < y\}$$

Par ailleurs, pour M_1 et M_2 dans $\mathbb{R}^2$, on note $d(M_1, M_2)$ la distance entre les points du plan associés.

1. Dessiner les ensembles F_1 et F_2.
2. On note $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les propositions suivantes :

$$\mathcal{P}_1 \ : \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall (M_1, M_2) \in F_1 \times F_2, \ d(M_1, M_2) < \varepsilon$$

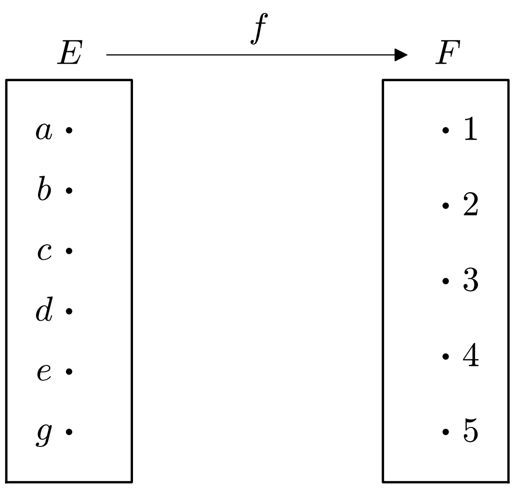
$$\mathcal{P}_2 \ : \ \forall (M_1, M_2) \in F_1 \times F_2, \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ d(M_1, M_2) < \varepsilon$$

   (a) Écrire en langage mathématique les *négations* des propositions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
   (b) Traduire en français courant les propositions $\mathcal{P}_1$, non($\mathcal{P}_1$), $\mathcal{P}_2$ et non($\mathcal{P}_2$).
   (c) Parmi ces quatre propositions, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. On justifiera ses réponses.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. *Exemple graphique*

Reproduire le dessin ci-contre et construire une application *surjective et non injective* de E dans F. Justifier.



2. *Cas général*

   Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

   (a) Donner la définition des ensembles $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ sous forme ensembliste :

   $$\forall A \in ..., \quad f(A) \ = \ \{...\}$$

   $$\forall B \in ..., \quad f^{-1}(B) \ = \ \{...\}$$

   (b) Montrer que pour toute partie $A \subset E$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   (c) Montrer que si f est injective, alors

   $$\forall A \subset E, \quad A = f^{-1}(f(A))$$

   (d) Construire un contre-exemple à cette égalité.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ n nombres réels. On note $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

2. Application : soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$$

Montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad x_i = 1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$.

1. Donner la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à l'aide du factoriel.
2. Montrer que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

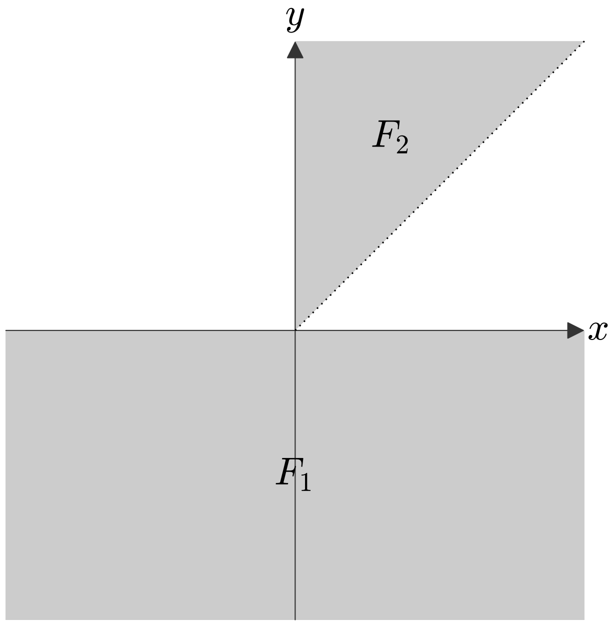
⋆ ⋆

⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1.



2. (a)

$$\text{non}(\mathcal{P}_1) \quad : \quad \forall \varepsilon > 0 \;/\; \exists (M_1, M_2) \in F_1 \times F_2,\ d(M_1, M_2) \geqslant \varepsilon$$

$$\text{non}(\mathcal{P}_2) \quad : \quad \exists (M_1, M_2) \in F_1 \times F_2 \;/\; \forall \varepsilon > 0,\ d(M_1, M_2) \geqslant \varepsilon$$

(b) La proposition non($\mathcal{P}_1$) affirme que l'on peut trouver deux points $M_1 \in F_1$ et $M_2 \in F_2$ tels que la distance entre eux soit aussi grande que l'on veut. La proposition $\mathcal{P}_1$ affirme au contraire que l'ensemble des distances entre des points de F_1 et des points de F_2 est majorée.

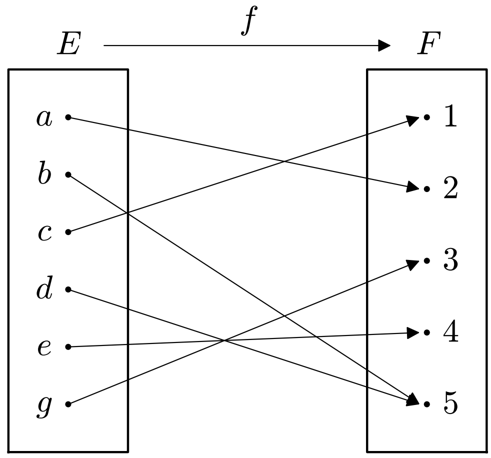
La proposition non($\mathcal{P}_2$) affirme qu'il existe deux points $M_1 \in F_1$ et $M_2 \in F_2$ (fixés) tels que la distance entre eux est plus grande que tous les entiers. La proposition $\mathcal{P}_2$ affirme au contraire que la distance entre deux points est toujours finie.

(c) Il est clair que seules deux des quatre propositions ci-dessus sont vraies.
Ainsi,
— Les domaines F_1 et F_2 pouvant s'étendre à l'infini, on peut trouver des points dont la distance est aussi grande que l'on veut. C'est donc non($\mathcal{P}_1$) qui est vraie.
— Une fois fixés deux points, la distance entre les deux est nécessairement finie. C'est donc $\mathcal{P}_2$ qui est vraie.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La fonction ci-dessous est surjective mais non injective.



En effet, f est surjective car tout élément de F est atteint par une flèche et f n'est pas injective car $f(b) = f(d)$.

2. (a)

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \qquad f(A) \; = \; \{y \in F \;/\; \exists a \in A \;/\; f(a) = y\} \; = \; \{f(a),\; a \in A\}$$

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), \qquad f^{-1}(B) = \{x \in E \;/\; f(x) \in B\}$$

(b) Soit A une partie de E. On souhaite ici montrer l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$. D'après la seconde définition ci-dessus, on a

$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \;/\; f(x) \in f(A)\}$$

Or, soit $a \in A$ quelconque. L'élément $f(a) \in F$ ayant, par définition, un antécédent dans A, il appartient à $f(A)$. Autrement dit, $f(a) \in f(A)$ et a fait partie des éléments de $f^{-1}(f(A))$.
On a donc $a \in f^{-1}(f(A))$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(c) Supposons maintenant que f est injective et montrons l'égalité demandée.
Puisque l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est en particulier valable si f est injective, pour montrer l'égalité demandée, il reste à démontrer l'inclusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Ainsi, soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition, on a $f(x) \in f(A)$. Autrement dit, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Mais f étant supposée injective, on a $x = a$ et $x \in A$.

Dans ce cas, on a donc également l'inclusion $f^{-1}(f(A)) \subset A$ et donc l'égalité $f^{-1}(f(A)) = A$.

(d) En s'appuyant sur la fonction proposée à la première question, on note que si l'on pose $A = \{b\}$, on a $f(A) = \{5\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{b, d\} \neq A$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels fixés. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2.\overline{x}.x_i+\overline{x}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{2.\overline{x}}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2.\overline{x}.\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}_{=\overline{x}} + \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2
\end{aligned}$$

2. Si les réels x_1 à x_n vérifient les égalités posées, on a

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 1 = \overline{x}^2$$

Mais alors, d'après la formule établie ci-dessus, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2 = 1-1=0$$

Or cette somme n'ayant que des termes positifs, elle n'est nulle que si tous ces termes le sont. Autrement dit,

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \qquad x_i - \overline{x} = 0 \iff x_i = \overline{x} = 1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. On a

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{\cancel{k}+1+n-\cancel{k}}{(n-k)(k+1)}\right) \\
&= \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆