CONTRÔLE CONTINU

Logique, ensemble, calcul algébrique.

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction.

1. Exprimer à l'aide des quantificateurs la proposition : "f n'est pas injective".
2. Traduire en langage courant les propostions suivante (on donnera dans chaque cas le terme mathématique associé à cette propriété) :
   (a) $\exists y \in F \ / \ \forall x \in E, \ y = f(x)$.
   (b) $\forall y \in F, \ \exists x \in E \ / \ y = f(x)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit E un ensemble.

1. Soient A et B deux parties de E.
   (a) Construire un diagramme de Venn faisant apparaître $A \cup B$ et $\overline{A \cup B}$.
   (b) Construire un diagramme de Venn faisant intervenir $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
   (c) Enoncer la première loi de De Morgan, donnant le complémentaire de $A \cup B$ en fonction de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
   (d) En appliquant l'égalité précédente aux ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$, démontrer la seconde loi de De Morgan, donnant le complémentaire de $A \cap B$ en fonction de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E. Montrer que
$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = 1.(1!) + 2.(2!) + 3.(3!) + \ldots + n.(n!)$

1. Écrire S_n à l'aide du signe Σ.
2. Recopier et compléter le tableau ci-contre.
3. Conjecturer une relation simple liant S_n et $(n+1)!$ puis la démontrer par récurrence (on pourra commencer par ajouter la colonne $(n+1)!$ au tableau rempli à la question précédente).

n	$n!$	S_n
1		
2		
3		
4		
5		

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = (1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n$

1. Calculer F_0 et F_1.
2. À l'aide du binôme de Newton, calculer F_2 et F_3.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un nombre entier pair (on pourra commencer par développer les deux termes de F_n à l'aide du binôme de Newton puis tout rassembler sous un même signe Σ).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Une application $f : E \to E$ n'est pas injective si deux éléments distincts de E ont la même image par f. Ainsi
$$\exists x, y \in E \ / \ x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)$$

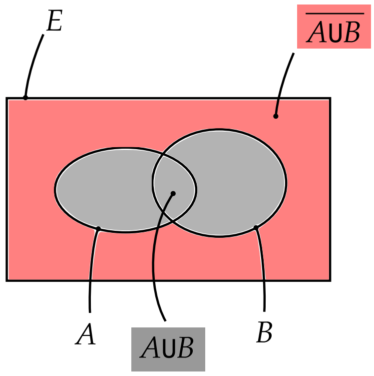
2. (a) En français, la première phrase dit : "il existe un élément y de F tel que pour tout x de E on ait $y = f(x)$. Dans ce cas, la fonction f est donc une fonction constante.

   (b) En français, la seconde phrase dit : "pour tout élément y de F, il existe un élément x de E tel que $y = f(x)$. Dans ce cas, la fonction f est donc surjective.

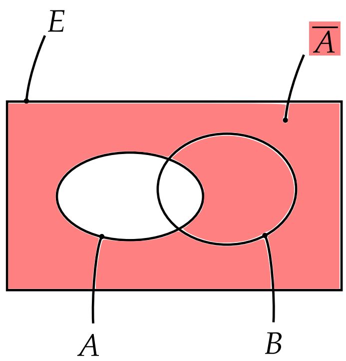
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

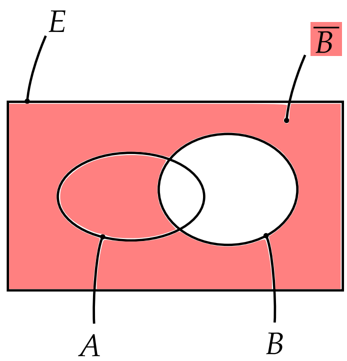
Exercice 2 :

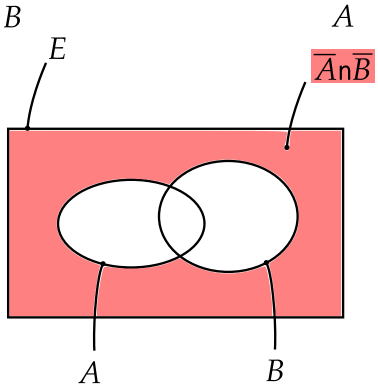
1.



2.







3. Les dessins ci-dessus illustrent la première loi de De Morgan :
$$\forall A, B \subset E, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

4. En appliquant l'égalité ci-dessus aux ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on a

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

Or si ces deux ensembles $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ et $A \cap B$ sont égaux, leurs complémentaires aussi. D'où :

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

5. La proposition que l'on souhaite démontrer pour tout $n \geqslant 2$ est la suivante :

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{“Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ sont } n \text{ parties de } E, \text{ alors } \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\text{”}$$

Or

— Initialisation : pour $n = 2$, il s'agit de la première loi de De Morgan.

— Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que la $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et considérons $(n+1)$ parties de E, notées $A_1, \ A_2, \ldots, \ A_n, \ A_{n+1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}} &= \overline{(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}} \\
&= \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \cap \overline{A_{n+1}} && \text{d'après la 1ère loi de De Morgan} \\
&= \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}} && \text{d'après l'hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— Conculsion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n = 2$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k.(k!)$

2.

n	$n!$	S_n	$(n+1)!$
1	1	1	2
2	2	5	6
3	6	23	24
4	24	119	120
5	120	719	720

3. D'après le tableau ci-dessus, on peut remarquer que, pour les premières valeurs de n, on a $S_n = (n+1)! - 1$. Démontrons le par récurrence : on pose

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{“}S_n = (n+1)! - 1\text{”}$$

— Initialisation : le tableau nous montre que $S_1 = 1 = 2! - 1$. Donc la propriété est vraie au rang 2.

— Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et calculons alors S_{n+1} en fonction de S_n :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k.(k!) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k.(k!) + (n+1).\left((n+1)!\right) \\
&= [(n+1)! - 1] + (n+1).\left((n+1)!\right) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \left((n+1)!\right)(1 + n + 1) - 1 \\
&= (n+2).\left((n+1)!\right) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

— <u>Conclusion</u> : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1.
$$F_0 = (1+\sqrt{5})^0 + (1-\sqrt{5})^0 = 1 + 1 = 2$$
et
$$F_1 = (1+\sqrt{5})^1 + (1-\sqrt{5})^1 = 1 + \cancel{\sqrt{5}} + 1 - \cancel{\sqrt{5}} = 2$$

2.
$$\begin{aligned} F_2 &= (1+\sqrt{5})^2 + (1-\sqrt{5})^2 = \Big(1 + 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2\Big) + \Big(1 - 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2\Big) \\ &= 1 + \cancel{2\sqrt{5}} + 5 + 1 - \cancel{2\sqrt{5}} + 5 \\ &= 12 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} F_3 &= (1+\sqrt{5})^3 + (1-\sqrt{5})^3 \\ &= \Big(1 + 3\sqrt{5} + 3(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^3\Big) + \Big(1 - 3\sqrt{5} + 3(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^3\Big) \\ &= 1 + \cancel{3\sqrt{5}} + 15 + \cancel{5\sqrt{5}} + 1 - \cancel{3\sqrt{5}} + 15 - \cancel{5\sqrt{5}} \\ &= 32 \end{aligned}$$

3. D'après la formule du binôme, on a
$$\begin{aligned} F_n &= \left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\sqrt{5}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\left(\sqrt{5}\right)^k + (-1)^k \left(\sqrt{5}\right)^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{5}\right)^k \left(1 + (-1)^k\right) \end{aligned}$$

Or dans la somme ci-dessus, lorsque k est impair, on a $1 + (-1)^k = 1 - 1 = 0$. Ainsi, il ne reste dans cette somme que les termes correspondant à k pair. Mais si k est pair, on a $1 + (-1)^k = 1 + 1 = 2$ et $(\sqrt{5})^k = 5^{\frac{k}{2}}$ est un entier. Puisque les coefficients binomiaux sont également entiers, dans la somme ci-dessus n'apparaissent que des entiers pairs. Leur somme est donc également un entier pair.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆