# CONTRÔLE CONTINU

Matrices et systèmes linéaires

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

**Exercice 1** Soient $a$ et $b$ deux réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. On note

$$M = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & ab \\ ab & b^2 - 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M = N - I_2$.
2. Montrer que $N^2 = N$.
3. En déduire $M^2$ en fonction de $M$.
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad M^n = (-1)^{n+1}.M$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3) \times (A + 3I_3)$. On fera apparaître explicitement les calculs.
2. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$ sous forme étendue.
3. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donner, pour tout vecteur $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'unique solution du système linéaire $AX = B$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** Soient $a \in \mathbb{R}$. On note

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (S) \,:\, AX = B$$

1. Montrer que le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution du système $AX = B$.
2. Montrer que $\det(A)$ s'annule pour $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
   Ind. : on pourra commencer par effectuer, dans $\det(A)$, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.
3. On admettra que $\det(A) = (a+1)^2(a+2)^2(a-1)^2(a-2)^2$. Donner, en fonction de $a$, le rang du système $(S)$.
4. Résoudre $(S)$ dans le cas $a = 1$. On donnera une paramétrisation de l'ensemble des solutions.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 4** Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note

$$(S_m) \ : \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (m+1)\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ -x & + & (m-2)\,y & + & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & + & (m+1)\,z & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Donner la matrice $A_m$ du système $(S_m)$.
2. Échelonner $A_m$.
3. Montrer que $\det(A_m) = (m-1)^2(m+2)$.
4. Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\Sigma_m$ des solutions de $(S_m)$. On en donnera dans chaque cas une paramétrisation ainsi qu'une interprétation géométrique dans l'espace muni d'un repère.

⋆ ⋆
⋆

# CORRECTION

**Exercice 1** :

1. La matrice $N$ cherchée vérifie

$$N = M + I_2 = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab \\ ab & b^2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} N^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^4+(ab)^2 & a^3b+ab^3 \\ a^3b+ab^3 & (ab)^2+b^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2(a^2+b^2) & ab(a^2+b^2) \\ ab(a^2+b^2) & b^2(a^2+b^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad a^2+b^2=1 \end{aligned}$$

D'où $N^2 = N$.

3. Puisque $N \times (-I_2) = (-I_2) \times N = -N$, on a

$$M^2 = (N-I_2)^2 = N^2 - 2.N \times I_2 + I_2^2 = N - 2.N + I_2 = -N + I_2 = -M$$

4. Soit $\mathcal{P}(n) \ : \ M^n = (-1)^{n+1}.M$.

— Initialisation : $M^1 = (-1)^{1+1}.M = M$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = (-1)^{n+1}.M \times M = (-1)^{n+1}.(-M) = (-1)^{n+2}.M$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $M^n = (-1)^{n+1}.M$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. On a
$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
D'où
$$\begin{aligned}(A - I_3) \times (A + 3I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5-4-1 & -2+2 & 1-4+3 \\ 10-8-2 & -4+4 & 2-8+6 \\ -5+4+1 & 2-2 & -1+4-3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{O}_3\end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, on a
$$\begin{aligned}(A - I_3) \times (A + 3I_3) = \mathbb{O}_3 &\Leftrightarrow A^2 + 2A - 3I_3 = \mathbb{O}_3 \\ &\Leftrightarrow A \times (A + 2I_3) = 3I_3 \\ &\Leftrightarrow A \times \frac{1}{3}(A + 2I_3) = I_3\end{aligned}$$
La matrice $A$ est donc inversible et
$$\begin{aligned}A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I_3 &= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Pour tout $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a
$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4a - 2b + c \\ 2a - b + 2c \\ -a + 2b + 2c \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. On a
$$A \times X_0 = \begin{pmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} = B$$
Donc $X_0$ est bien une solution de $(S)$.

2.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a^2 & a & 2 & 2a \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3+L_4}{=} \begin{vmatrix} a^2+3a+2 & a^2+3a+2 & a^2+3a+2 & a^2+3a+2 \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{vmatrix} \\
&= (a^2+3a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 2a & 2 \\ 2 & 2a & a^2 & a \\ 2a & 2 & a & a^2 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}}{=} (a^2+3a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a^2-a & a & 2-a \\ 2 & 2a-2 & a^2-2 & a-2 \\ 2a & 2-2a & -a & a^2-2a \end{vmatrix} \\
&= (a+1)(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a(a-1) & a & -(a-2) \\ 2 & 2(a-1) & a^2-2 & a-2 \\ 2a & -2(a-1) & -a & a(a-2) \end{vmatrix} \\
&= (a+1)(a+2)(a-1)(a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & -1 \\ 2 & 2 & a^2-2 & 1 \\ 2a & -2 & -a & a \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

donc $\det(A)$ s'annule pour $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

3. — Si $a \notin \{-2, -1, 1, 2\}$, la matrice $A$ est inversible. Le système est alors de rang 4.

— Si $a = -2$, on a

$$
A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}
$$

On constate ici que, dans $A$, on a $L_1 = -L_4$ et $L_2 = -L_3$. Par ailleurs, $L_1$ et $L_2$ n'étant pas proportionnelles, on en déduit que $\mathrm{rg}(S) = 2$.

— Si $a = -1$, on a

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

On constate ici que, dans $A$, on a $L_1 = -L_2$ et $L_3 = -L_4$. Par ailleurs, $L_2$ et $L_3$ n'étant pas proportionnelles, on en déduit que $\text{rg}(S) = 2$.

— Si $a = 1$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate ici que, dans $A$, on a $L_1 = L_2$ et $L_3 = L_4$. Par ailleurs, $L_2$ et $L_3$ n'étant pas proportionnelles, on en déduit que $\text{rg}(S) = 2$.

— Si $a = 2$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On constate ici que, dans $A$, on a $L_1 = L_4$ et $L_2 = L_3$. Par ailleurs, $L_1$ et $L_2$ n'étant pas proportionnelles, on en déduit que $\text{rg}(S) = 2$.

4. D'après l'étude précédente, si $a = 1$, le système $(S)$ est de rang 2. Par ailleurs, d'après la première question, on sait que $(S)$ admet au moins une solution. Il n'est donc pas incompatible et on obtient un système équivalent à $(S)$ en n'en conservant que deux équations non colinéaires, par exemple la première et la troisième. Ainsi :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & t & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\underset{(E_2)\leftarrow(E_2)-2.(E_1)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & 2 \\ & & & & -3z & - & 3t & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 - y - 2z - 2t \;=\; -y \\ z & = & 1 - t \end{array} \right.$$

D'où $\Sigma = \{(-y, y, 1-t, t),\ y, t \in \mathbb{R}\}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 4** :

1.

$$A_m = \begin{pmatrix} m+1 & 2 & -2 \\ -1 & m-2 & 1 \\ -2 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A_m \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & m-2 & 1 \\ m+1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & m+1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (m+1)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & m-2 & 1 \\ 0 & m(m-1) & m-1 \\ 0 & -2(m-1) & m-1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & m-2 & 1 \\ 0 & -2(m-1) & m-1 \\ 0 & m(m-1) & m-1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{m}{2} L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & m-2 & 1 \\ 0 & -2(m-1) & m-1 \\ 0 & 0 & (m-1)\left(1+\frac{m}{2}\right) \end{pmatrix}$$

3. En échelonnant la matrice $A_m$, on a effectué deux permutations de lignes. Le déterminant de la matrice échelonnée obtenue à l'issue du processus est donc égal à $\det(A_m)$. D'où

$$\det(A_m) = (-1).(-2(m-1)).(m-1)\left(\frac{m}{2}+1\right) = (m-1)^2(m+2)$$

4. D'après le calcul précédent, on a

$$\det(A_m) = 0 \iff m \in \{-2, 1\}$$

Ainsi,

— Pour tout $m \notin \{-2, 1\}$, le système $(S_m)$ est inversible. Étant également homogène, il admet comme unique solution le triplet $(0,0,0)$. Donc $\Sigma_m = \{(0,0,0)\}$, représenté par le centre du repère.

— Pour $m = -2$, d'après les calculs précédents, on a

$$A_{-2} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système $(S_{-2})$ est donc de rang 2. Étant homogène, l'ensemble $\Sigma_{-2}$ est non vide et peut être décrit à l'aide de $d = 3 - 2 = 1$ paramètre :

$$(S_{-2}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 4y & + & z & = & 0 \\ & & 6y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcccl} x & = & -4y+z & = & -z \\ y & = & \frac{1}{2}z & & \end{array} \right.$$

D'où

$$\Sigma_{-2} = \left\{ \left(-z, \frac{1}{2}z, z\right), \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

Géométriquement, cela correspond à la droite de l'espace passant par l'origine et engendré (par exemple) par le vecteur $\overrightarrow{u} = (-2, 1, 2)$.

— Pour $m = 1$, d'après les calculs précédents, on a

$$A_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système $(S_1)$ est donc de rang 1. Étant homogène, l'ensemble $\Sigma_1$ est non vide et peut être décrit à l'aide de $d = 3 - 1 = 2$ paramètre :

$$(S_1) \Leftrightarrow -x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$$

D'où

$$\Sigma_1 = \{(x, y, x + y)\,,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Géométriquement, cela correspond au plan de l'espace passant par l'origine et engendré (par exemple) par les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 1)$.

⋆ ⋆
⋆