CONTRÔLE CONTINU

Matrices et systèmes linéaires

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Recopier et compléter les définitions suivantes :

   (a) A est symétrique si et seulement si
   $$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \ \dots\dots\dots\dots$$

   (b) A est diagonale si et seulement si
   $$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \ \dots\dots\dots\dots$$

2. (a) Compléter la définition suivante : la matrice $A \times B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ vérifiant
   $$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad c_{ij} \ = \ \dots\dots\dots\dots$$

   (b) Montrer que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient A et B les deux matrices carrées à trois lignes définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 2I_3$$

où I_3 est la matrice identité à trois lignes.

1. Donner la matrice B sous forme étendue.
2. Calculer B^2.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $B^k = 3^{k-1}.B$. Que dire du cas $k = 0$?
4. En s'appuyant sur le binôme de Newton appliqué aux matrices, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = 2^n.I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3}.B$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$
et (S) le système linéaire de matrice A dont le second membre est $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est une matrice inversible. Que cela indique-t-il sur le système (S) ?
2. Écrire la matrice étendue $\tilde{A}$ du système (S).
3. À l'aide de combinaisons de lignes sur la matrice $\tilde{A}$, construire un système triangulaire (S') équivalent à (S).
4. Résoudre (S') et en déduire l'ensemble des solutions de (S).
5. Déduire des questions précédentes la matrice A^{-1}.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note
$$(S_m) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array} \right.$$
et l'on note Σ_m l'ensemble des solutions de (S_m).

1. Donner la matrice A_m du système (S_m).
2. Montrer sans calcul que $\det(A_1) = 0$.
3. Calculer $\det(A_m)$ en fonction de m.
4. Montrer que $\det(A_m) = 0$ si et seulement si $m \in \{1, -2\}$.
5. Résoudre sans calcul le système (S_m) dans les cas $m \notin \{1, -2\}$.
6. Cas $m = 1$.
   (a) Donner sans calcul le rang de (S_1).
   (b) En déduire la dimension de l'ensemble Σ_1.
   (c) Donner l'ensemble Σ_1.
7. Cas $m = -2$.
   (a) Montrer que (S_{-2}) est équivalent au système
   $$(S') : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array} \right.$$
   (b) Déterminer l'ensemble Σ_{-2}. On précisera la dimension de cet ensemble.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) A est symétrique si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ a_{ij} = a_{ji}$$

   (b) A est diagonale si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j\ \Rightarrow a_{ij} = 0$$

2. (a) La matrice $A \times B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad c_{ij} \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

   (b) Supposons ici que A et B sont toutes deux diagonales et notons $C = (c_{ij}) = A \times B$. D'après la formule ci-dessus, Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

   Or A étant diagonale, pour tout $k \neq i$, on a $a_{ik} = 0$. Donc

$$c_{ij} = a_{ii}.b_{ij}$$

   Par ailleurs, si $i \neq j$, on a $b_{ij} = 0$ et donc $c_{ij} = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.
$$B = A - 2I_3 \ = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Par calcul direct, on obtient $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3.B$.

3. On raisonne par récurrence. Ainsi, pour $k = 1$, on a bien $B^1 = B = 3^{1-1}.B$.
   Supposons donc qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 3^{k-1}.B$. On a alors

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k \times B = 3^{k-1}.B \times B \\ &= 3^{k-1}.B^2 = 3^{k-1}.3.B \\ &= 3^k.B \end{aligned}$$

   La propriété est donc héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Dans le cas $k = 0$, la formule ne marche pas :

$$B^0 = I_3 \neq \frac{1}{3}B$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$A^n = (2.I_3 + B)^n$$
Puisque $B \times 2.I_3 = 2.I_3 \times B$ $(= 2B)$, on peut appliquer le binôme de Newton à l'expression ci-dessus. Ainsi
$$\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2.I_3)^{n-k} \times B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}.B^k \\
&= 2^n.I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1}.B \\
&= 2^n.I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k - 2^n\right).B \\
&= 2^n.I_3 + \frac{1}{3}\left((2+3)^n - 2^n\right).B \\
&= 2^n.I_3 + \frac{5^n - 2^n}{3}.B
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 : Soient
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$
et (S) le système linéaire de matrice A dont le second membre est $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1.
$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1 \neq 0$$
donc A est inversible. Le système (S) est donc également inversible. Il admet une unique solution X.

2.
$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 2 & 2 & 3 & c \end{array}\right)$$

3.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 2 & 2 & 3 & c \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{=} \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 6 & 5 & c+2a \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}{=} \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & -1 & c-4a-6b \end{array}\right)$$

D'où

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & 2y & + & z & = & a & (E_1) \\ & & y & + & z & = & a+b & (E_2) \\ & & & & -z & = & -4a-6b+c & (E_3) \end{array}\right.$$

4. On résout (S') en remontant :

$$\begin{array}{lcl} (E_3) & \Rightarrow & z = 4a+6b-c \\ (E_2) & \Rightarrow & y = a+b-z = -3a-5b+c \\ (E_1) & \Rightarrow & x = 2y+z-a = -3a-4b+c \end{array}$$

Les deux systèmes (S) et (S') étant équivalents, le système (S) admet donc pour unique solution

$$X = \begin{pmatrix} -3a-4b+c \\ -3a-5b+c \\ 4a+6b-c \end{pmatrix}$$

5. La théorie nous assure que le vecteur solution obtenu ci-dessus est égal au produit $A^{-1} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On en déduit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1.

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

2. On a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a toutes ses lignes identiques. Elle n'est donc pas inversible et $\det(A_1) = 0$.

3. De façon générale,

$$\begin{aligned} \det(A_m) &= \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \\ &= m^3 + 1 + 1 - m - m - m \\ &= m^3 - 3m + 2 \end{aligned}$$

4. D'après les questions précédentes, le déterminer $\det(A_m)$ est un polynôme de degré 3, dont $m = 1$ est une racine. Ainsi, il exite a, b et c tels que

$$\det(A_m) = (m-1)(am^2 + bm + c)$$

Par identification, on obtient

$$\det(A_m) = (m-1)(m^2 + m - 2)$$

Les calculs donnent, pour le polynôme $m^2 + m - 2$, les racines 1 et -2. Ainsi,

$$\det(A_m) = (m-1)^2(m+2)$$

et $\det(A_m) = 0$ si et seulement si $m \in \{1, -2\}$.

5. D'après les calculs précédents, si $m \notin \{1, -2\}$, le système (S_m) est inversible. Il admet donc une unique solution. D'autre part, (S_m) étant homogène, cette unique solution est le vecteur nul $(0, 0, 0)$.

6. <u>Cas $m = 1$</u>.

   (a) Les trois équations du système (S_1) sont identiques. Il est donc de rang 1 et

   $$(S_1) \iff x + y + z = 0$$

   (b) On a $d = 3 - 1 = 2$.

   (c) On a $(S_1) \Leftrightarrow x = -y - z$. D'où

   $$\Sigma_1 = \{(-y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}$$

7. <u>Cas $m = -2$</u>.

   (a) Puisque $\det(A_{-2}) = 0$, on a $\mathrm{rg}(S_{-2}) < 3$. D'autre part, (E_2) et (E_3) ne sont pas proportionnelles entre elles donc $\mathrm{rg}(S_{-2}) \geqslant 2$. On en déduit $\mathrm{rg}(S_{-2}) = 2$. On peut alors supprimer la première équation et l'on a bien

   $$(S_{-2}) \iff (S') : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & mz & = & 0 \end{array} \right.$$

(b) D'après la question précédente, l'ensemble Σ_{-2} est de dimension $d = 3 - 2 = 1$. D'autre part,

$$(S_{-2}) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rclcrcl} x & = & 2y & - & z & = & z \\ y & = & z & & & & \end{array} \right.$$

D'où

$$\Sigma_{-2} \; = \; \{(z, z, z), \; z \in \mathbb{R}\}$$

⋆ ⋆
⋆