CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables.

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit
$$f(x,y) = -x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 + 5x^2 + 1.$$

1. Montrer que f admet pour seuls points critiques les points
$$P_0 = (0,0),\ P_1 = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ et } P_2 = (6,2).$$
2. Déterminer la nature des points P_1 et P_2. Que dire du point P_0 ?
3. Déterminer et tracer dans les repères 1 et 2 les fonctions partielles associées au point P_0.
4. Le point P_0 est-il un extremum ? Justifier.

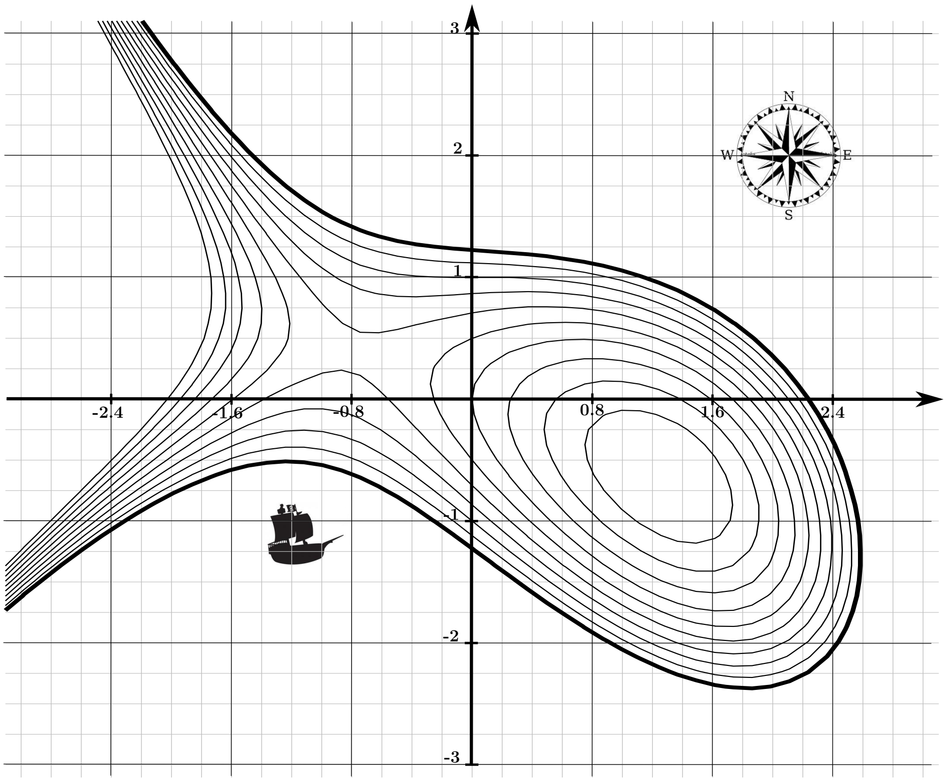
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit
$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{y}{x} \end{array}$$
et sa surface $\mathcal{S}_g$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Calculer le gradient de g en chaque point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ de son domaine.
3. Tracer dans le repère 3 les gradients de g aux points suivants :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ ; \ A_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ C_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ D_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ ; \ E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
4. Montrer qu'en chaque point M du domaine, $\vec{\nabla} g$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{O}M}$.
5. Déterminer et tracer dans le repère 3 les lignes de niveaux de g passant par les points donnés à la question 3. (On indiquera le niveau de chaque ligne).
6. Décrire succinctement l'allure de $\mathcal{S}_g$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île : le contour extérieur (en gras) est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.



Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.

1. *Partie graphique.*
   (a) Dessiner dans le repère 4 le profil du relief le long des itinéraires sud-nord correspondant aux latitudes $x = -1.2$ et $x = 0$.
   (b) Estimer l'altitude du point culminant de chacun de ces itinéraires.
   (c) Estimer la latitude ℓ_{min} de l'itinéraire offrant le plus petit dénivelé.
   (d) Estimer l'altitude a_{min} du point culminant de cet itinéraire.

2. *Confrontation avec le calcul.*
   En fait le profile de l'île correspond à la fonction f définie par

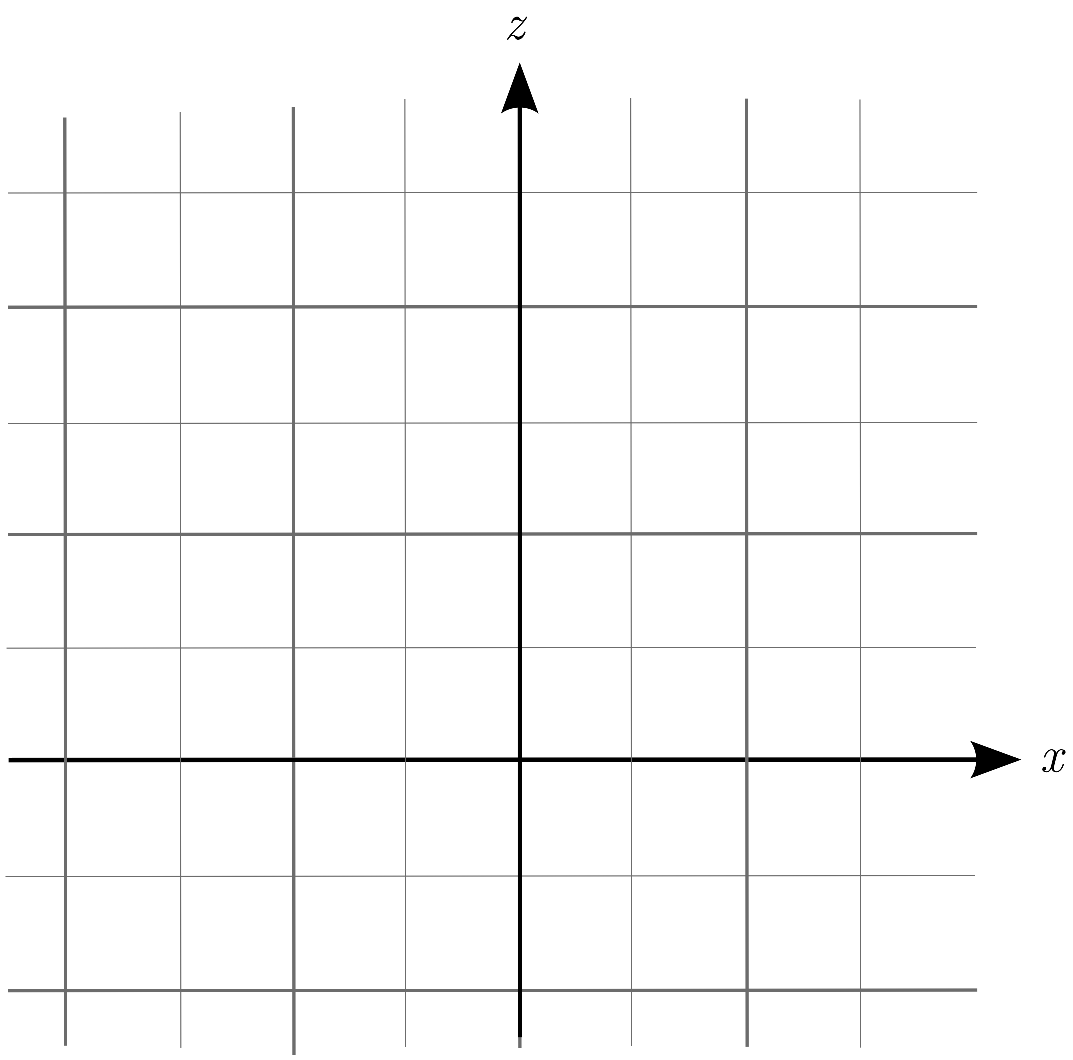
$$f(x, y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$$

   (les altitudes étant exprimées en centaines de mètres).

   (a) Pour une latitude ℓ fixée, déterminer la fonction partielle de f associée à l'itinéraire sud-nord I_ℓ correspondant.
   (b) Montrer par le calcul que le point culminant de I_ℓ est atteint en $y = -\frac{\ell}{2}$.
   (c) Que dire de la courbe contenue dans le plan vertical d'équation $y = -\frac{x}{2}$?
   (d) Déterminer les valeurs exactes de ℓ_{min} et a_{min}.

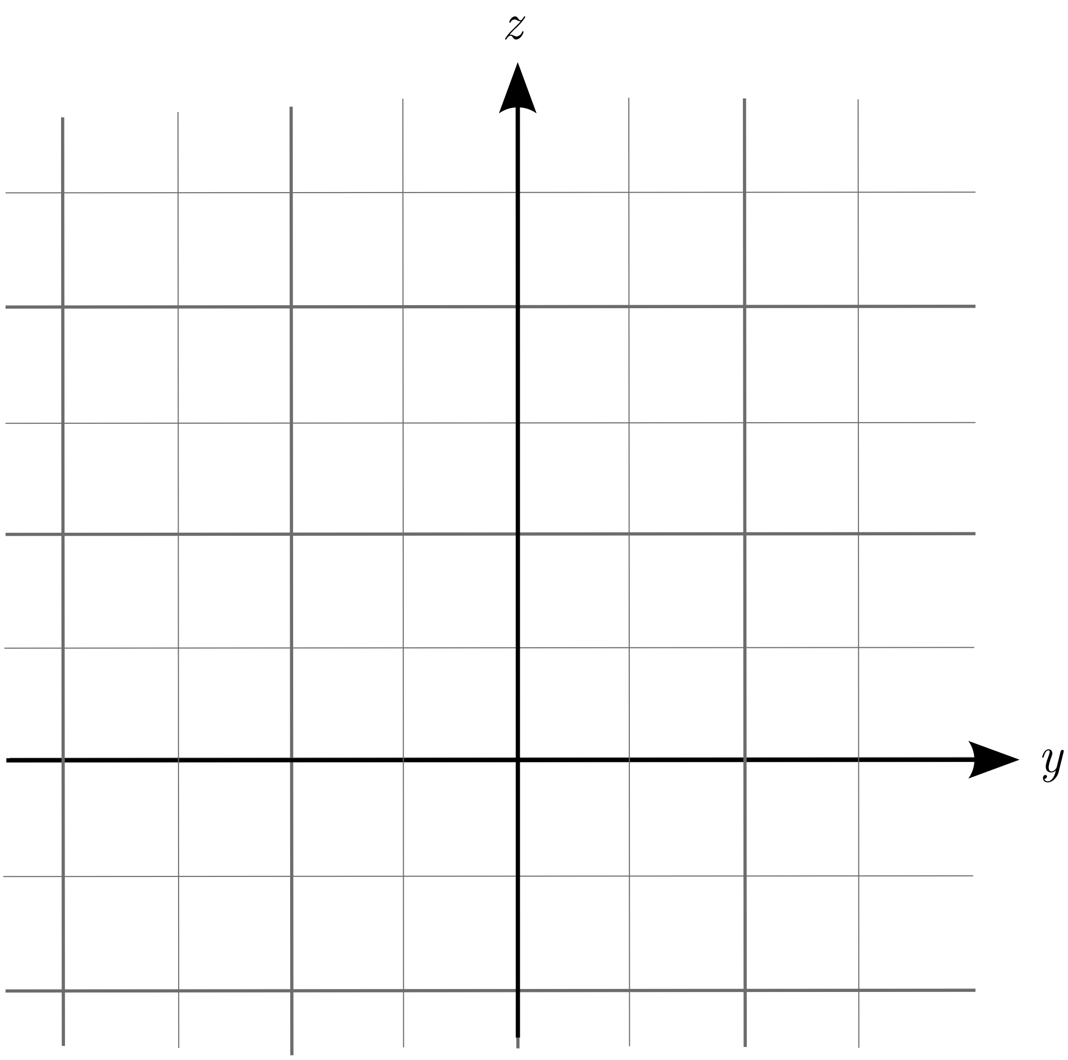
⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



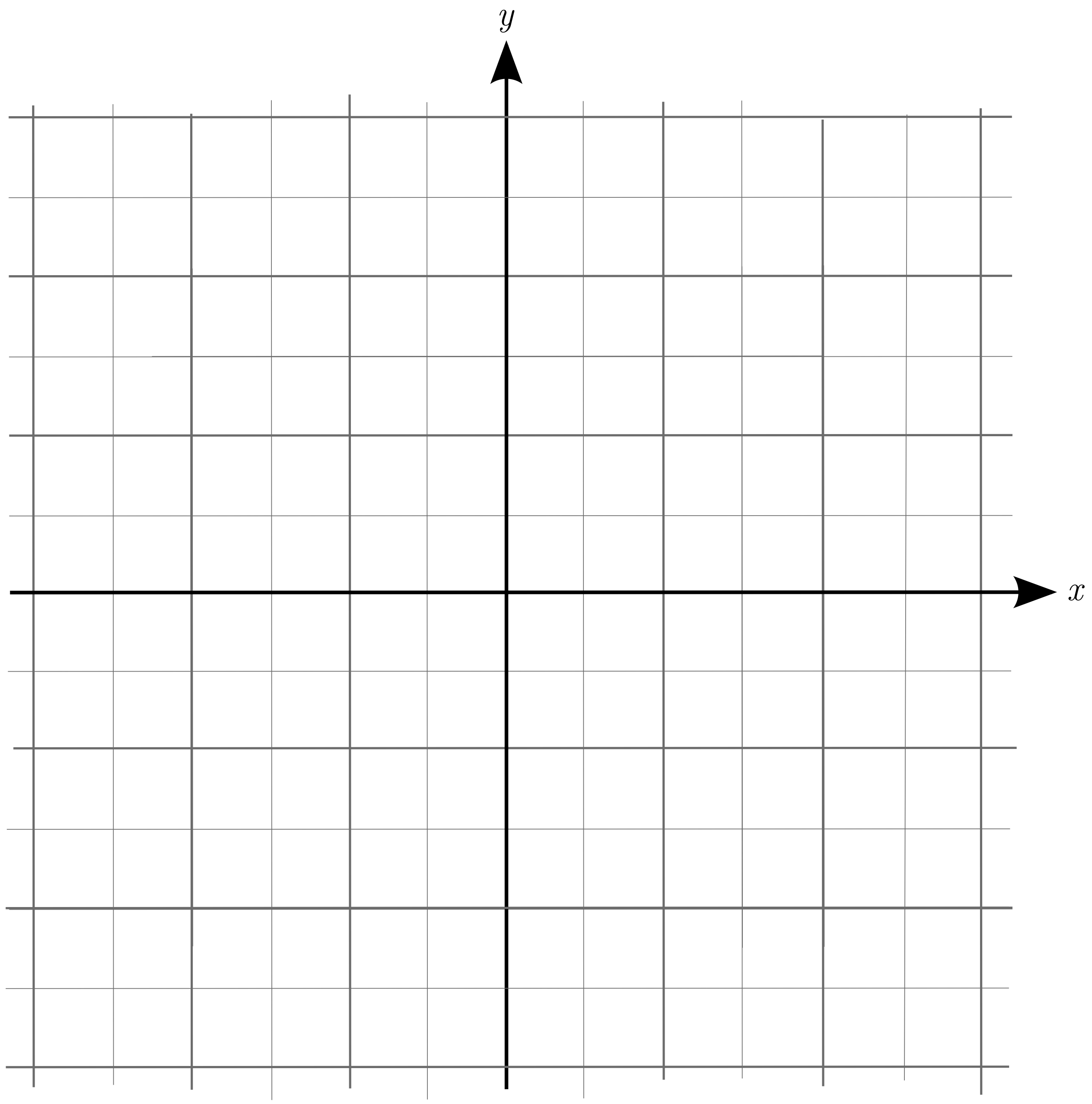
Repère 1

Nom : .... Prénom : ....



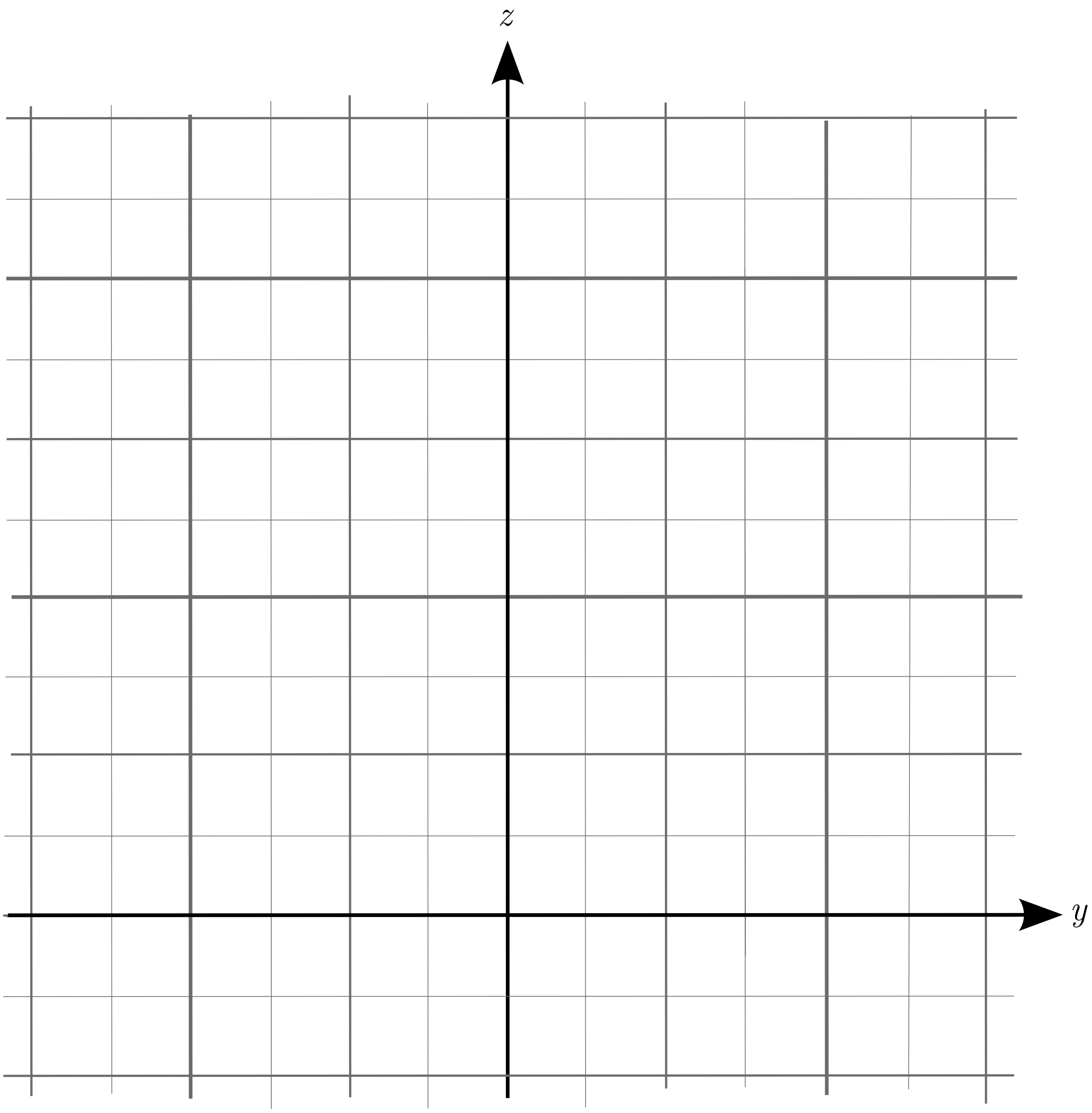
Repère 2

Nom : .... Prénom : ....



Repère 3

Nom : .... Prénom : ....



Repère 4

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Les dérivées partielles de f sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & -3x^2+6xy-6y^2+10x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 3x^2-12xy+9y^2 \end{array}\right.$$

Les points critiques de f sont donc les solutions du système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcll} -3x^2+6xy-6y^2+10x & = & 0 & (1) \\ x^2-4xy+3y^2 & = & 0 & (2) \end{array}\right.$$

Le membre de gauche de l'équation (2) est une forme quadratique dont la mise sous forme canonique permet la factorisation :

$$q(x,y) = (x-2y)^2 - y^2 = (x-y)(x-3y).$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rl} (S) \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ -3y^2+10y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ -15y^2+30y & = & 0 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & \frac{10}{3} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ y & = & 2 \end{array}\right. \end{array}$$

On retrouve donc les trois points critiques proposés.

2. Pour déterminer la nature des points critiques, on passe par les dérivées secondes partielles :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & -6x+6y+10 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & = & 6x-12y \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & -12x+18y \end{array}\right.$$

Ainsi :

–

$$\begin{array}{rcll} r_1 & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{10}{3}\right) & = & 10 \\ s_1 & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{10}{3}\right) & = & -20 \\ t_1 & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{10}{3}\right) & = & 20 \end{array}$$

Donc $\Delta_1 = s_1^2 - r_1t_1 = 400 - 200 = 200 > 0$ donc P_1 est un point selle.

–

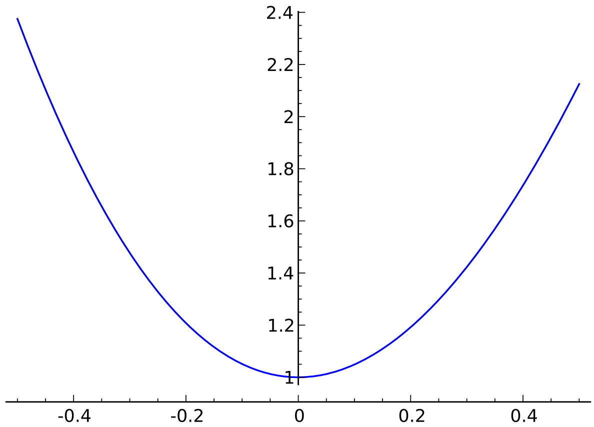
$$\begin{array}{rcll} r_2 & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,2) & = & -14 \\ s_2 & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(6,2) & = & 12 \\ t_2 & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,2) & = & -36 \end{array}$$

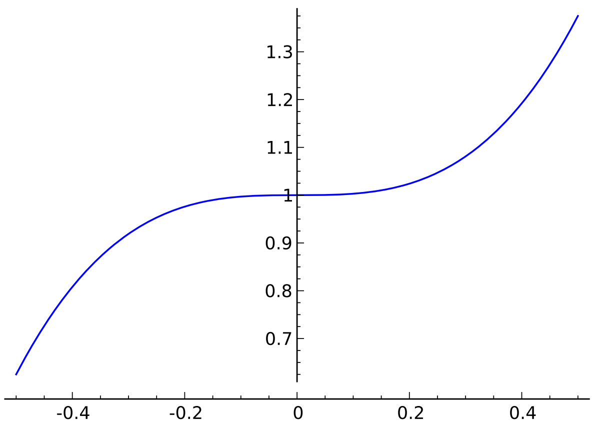
Donc $\Delta_2 = s_2^2 - r_2t_2 = 12^2 - 14 * 36 < 0$. Puisque $r_2 < 0$, P_2 est un max.

Pour P_0, on obtient $s_0 = t_0 = 0$ donc $\Delta_0 = 0$. La méthode ne permet donc pas de conclure.

3. Les fonctions partielles associées à P_0 sont

$$\phi_0\ :\ x \mapsto f(x,0) = -x^3 + 5x^2 + 1 \qquad\qquad \psi_0\ :\ x \mapsto f(0,y) = 3y^3 + 1$$





4. D'après le graphe de ψ, on voit que P_0 ne peut être un extremum.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 :

1. $g(x,y)$ existe pour tout (x,y) tel que $x \neq 0$. Le domaine D_g de g est donc le plan privé de l'axe (Oy).
2.

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in D_g, \quad \nabla(g) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\\ &= \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

3.
4.

$$\nabla(g).\overrightarrow{OM} \ = \ \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ = \ -\frac{y}{x} + \frac{y}{x} \ = \ 0.$$

Le gradient de g est donc, en chaque point M du plan (xOy), orthogonal à $\overrightarrow{OM}$.

5. À tracer sous Sage.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 :

1. (a)
   (b) Le point culminant de l'itinéraire correspondant à la latitude $x = -1.2$ se situe au niveau de la 5ième ligne de niveau, correspondant à 125m.
   Celui de l'itinéraire correspondant à la latitude $x = 0$ se situe au niveau de la 6ième ligne, soit 150m.
   (c) L'itinéraire donnait le plus petit dénivelé correspond à l'abscisse $x = -0.8$.
   (d) Le point culminant de cet itinéraire est entre les lignes 4 et 5. Son altitude est donc d'à peu près 110m.
2. (a) La fonction partielle cherchée est

$$\phi_\ell\ :\ y \mapsto f(\ell, y) = -\frac{\ell^3}{3} - \ell y - y^2 + \ell + \frac{3}{2}$$

(b) Le point culminant de I_ℓ correspond au maximum de la fonction ϕ_ℓ. Or ϕ_ℓ est un polynôme de degré 2 dont le coefficient dominant est -1 et dont la dérivée $\phi'_\ell(y) = -\ell - 2y$ s'annule en $y = \frac{-\ell}{2}$. Ce sommet est donc le maximum cherché.

(c) La courbe que trace sur la surface le plan vertical d'équation $y = \frac{-x}{2}$ rassemble les points culminants de tous les itinéraires Sud-Nord de la baie. Il s'agit donc de la ligne de crête de l'île.

(d) L'itinéraire offrant le plus petit dénivelé est celui passant par le point selle de l'île. Il correspond au point de la ligne de crête le plus bas (si l'on omet les points correspondant à des itinéraires qui sont hors de la baie). On l'obtient donc en étudiant la fonction

$$c\,:\,x \mapsto f\left(x, -\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + x + \frac{3}{2}$$

dont la dérivée est

$$c'(x) = -x^2 + \frac{x}{2} + 1 = -\left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{8}\right).$$

La latitude cherchée correspond donc à la racine négative $\ell_{\min} = -\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ et le point culminant de l'itinéraire correspondant est

$$a_{\min} = c(\ell_{\min}) = \frac{71}{48} - \frac{5}{48}\sqrt{17} \approx 1.05$$