CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 + 1$$

(a) Montrer que les points

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

sont les uniques points critiques de f.

(b) Déterminer leur(s) nature(s).

2. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé et l'on note $\mathcal{C}$ la courbe de l'espace formée des des points M_u dont les coordonnées sont de la forme

$$M_u = (1 - u^2, 0, u), \quad u \in \mathbb{R}$$

(a) Exprimer la distance en un point M_u de $\mathcal{C}$ et un point $N_v = (0, v, 0)$ quelconque de l'axe $(0y)$ en fonction de $f(u, v)$.

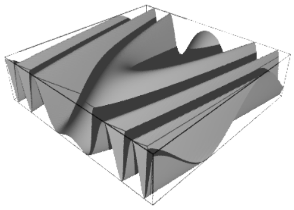
(b) Montrer que tout point de $\mathcal{C}$ est dans le plan (xOz).

(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est une parabole dont on précisera les coordonnées du sommet.

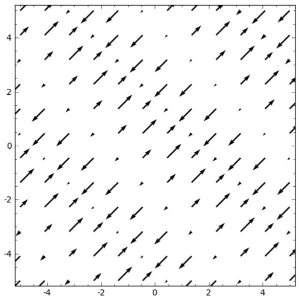
(d) Interpréter géométriquement les extrema P_1 et P_2 déterminés à la question 1.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

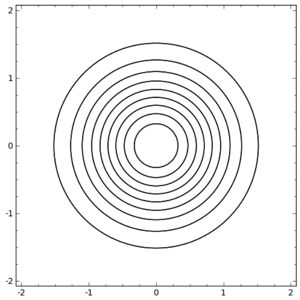
Exercice 2 Associer par couples les dessins ci-dessous :



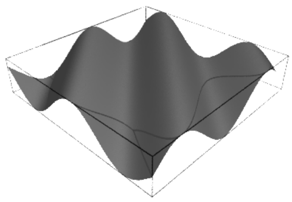
A



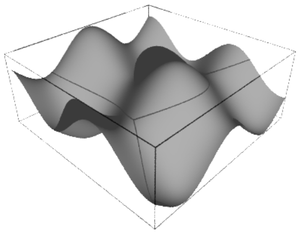
B



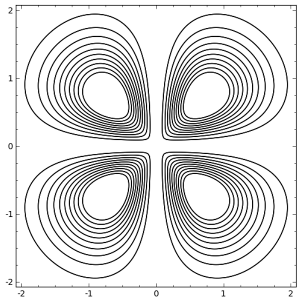
C



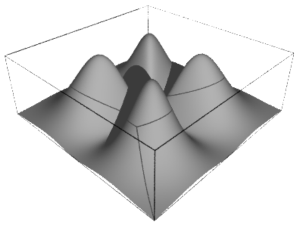
D



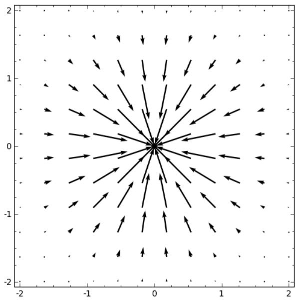
E



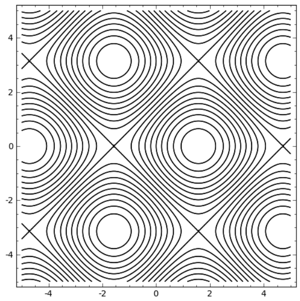
F



G



H



I

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit F le champs de vecteur défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = (1 - y\cos(x), -\sin(x) - y)$$

représenté dans le repère ci-joint.

1. Montrer que F dérive d'un potentiel $V(x,y)$ à déterminer (on rappelle que F dérive du potentiel V si et seulement si $F = -\nabla V$).
2. Montrer que le potentiel V dont dérive F n'admet pas de point critique.

3. On suppose que ce champs de vecteurs est un champs de vitesses.
   Tracer dans le repère ci-joint la trajectoire d'une particule soumise à ce champs de vitesse et partant du point $(-4, 1)$ puis du point $(0, 4)$.

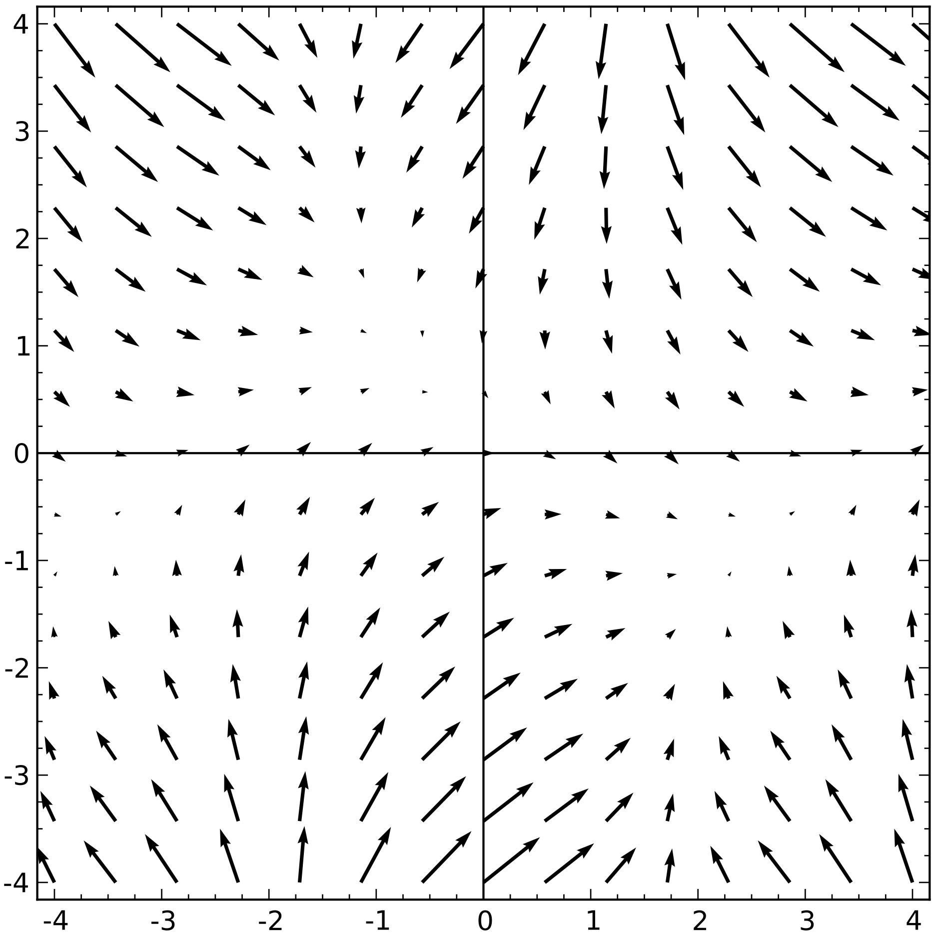
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. On suppose de plus qu'en tout point, $\nabla\varphi$ est colinéaire au vecteur $u = (1, 0)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction ψ d'une variable x, telle que $\varphi(x, y) = \psi(x)$.
2. Montrer que les lignes de niveaux de φ sont des droites du plan (xOy) dont on précisera l'orientation.
3. Décrire la surface $\mathcal{S}_\varphi$ dans le cas où $\psi(x) = \sin(x)$.

⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1

1. (a) Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x = 2x(x-1)(x+1) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Les solution du système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ sont donc les trois points P_0, P_1 et P_2 donnés.

(b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

D'où :

	P_0	P_1	P_2
r	-2	4	4
s	0	0	0
t	2	2	2
$\tilde{\Delta}$	4	-8	-8
Nat.	Selle	Min	Min

2. (a)

$$\begin{aligned} d(M_u, N_v) &= \sqrt{(1-u^2)^2 + v^2 + u^2} \\ &= \sqrt{f(u,v)} \end{aligned}$$

(b) Pour tout u, le point M_u est clairement dans le plan d'équation $y = 0$.

(c) En notant x la première coordonnée de M_u et z la troisième, il apparaît que pour tout point M_u, on a $x = 1 - z^2$.

On reconnaît alors une parabole du plan (xOz) dont le sommet est en $z = 0$, soit le point $M_0 = (1, 0, 0)$.

(d) Les points P_1 et P_2 de la question 1 correspondent aux points M_u et N_v pour lesquels la distance est minimale.

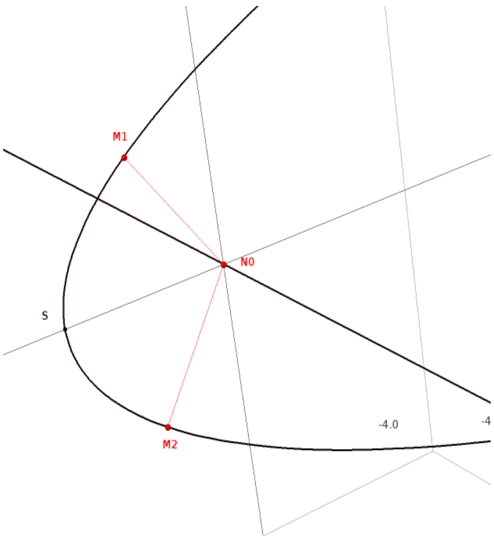
Puisque $v = 0$ en chacun de ces points, le point N_v de l'axe (Oy) le plus proche de la parabole est le centre $N_0 = (0, 0, 0)$ du repère.

De même, les valeurs $u = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ indiquent que les points de la parabole les plus proches du centre N_0 sont les points $M_1 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $M_2 = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

On peut visualiser tout ceci sous `Sage` à l'aide du code suivant :

```
par=parametric_plot((1-x^2,0,x),(x,-2,2),thickness=4,color=(0.1,0,0))
axe=line([(0,-4,0),(0,4,0)],color=(0.1,0,0),thickness=4)
axex=line([(4,0,0),(-4,0,0)],color=(0.1,0,0))
axey=line([(0,4,0),(0,-4,0)],color=(0.1,0,0))
axez=line([(0,0,4),(0,0,-4)],color=(0.1,0,0))
S=point((1,0,0),color=(0.1,0,0),size=10)
tS=text3d('S',(1.1,0,0.1),color=(0.1,0,0))
N=point((0,0,0),color=(1,0,0),size=15)
tN=text3d('N0',(-0.1,0.1,0),color=(1,0,0))
M1=point((1/2,0,sqrt(2)/2),color=(1,0,0),size=15)
tM1=text3d('M1',(1/2,0,sqrt(2)/2+0.1),color=(1,0,0))
M2=point((1/2,0,-sqrt(2)/2),color=(1,0,0),size=15)
tM2=text3d('M2',(1/2,0,-sqrt(2)/2-0.1),color=(1,0,0))
l1=line([(1/2,0,sqrt(2)/2),(0,0,0)],color=(1,0,0))
l2=line([(1/2,0,-sqrt(2)/2),(0,0,0)],color=(1,0,0))

par + axex + axey + axez + axe + S+tS + N+tN + M1+tM1 + M2+tM2 + l1
+ l2
```



Question supplémentaire : comment interpréter le point P_0 de la question 1 ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Les couples sont :

$$B - D \qquad C - H \qquad E - I \qquad F - G$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. F dérive du potentiel V si et seulement si $F = -\nabla V$. Il faut donc que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -1 + y\cos(x) \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \sin(x) + y \end{cases}$$

   En intégrant la première équation par rapport à x, on obtient

$$V(x,y) = -x + y\sin(x) + k(y).$$

   En dérivant cette expression par rapport à y et en identifiant à la seconde équation du système, on obtient

$$\sin(x) + k'(y) = \sin(x) + y \qquad \Rightarrow k(y) = \frac{1}{2}y^2 + \lambda$$

   Autrement dit, F dérive de n'importe quel potentiel V de la forme

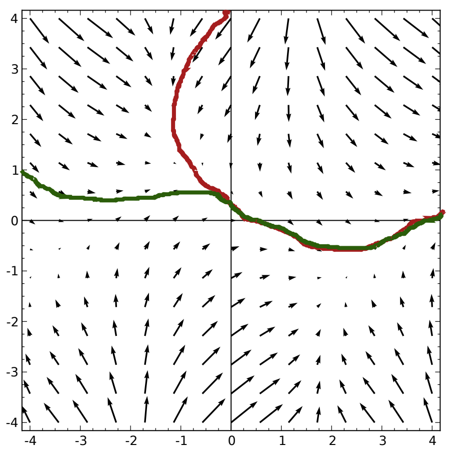
$$V(x,y) = -x + y\sin(x) + \frac{1}{2}y^2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. V admet des points critiques si et seulement si le système suivant admet des solutions :

$$\begin{cases} -1 + y\cos(x) &= 0 \\ \sin(x) + y &= 0 \end{cases}$$

   Or ce système conduit à l'équation $\sin(x)\cos(x) = -1$, soit $\sin(2x) = -2$; ce qui n'est jamais vérifié.

3.



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. Si $\nabla\phi$ est colinéaire à $u = (1,0)$, le produit vectoriel $\nabla\phi \wedge u$ doit être nul. On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

   Autrement dit, la fonction ϕ ne dépend que de x : $\phi(x,y) = \psi(x)$.

2. Les lignes de niveaux sont les courbes du plan d'équation $\phi(x, y) = $ cste. Dans notre cas, il s'agit des courbes d'équations $\psi(x) =$cste.

   Il s'agit ici d'équations algébriques. Les solutions x^* de ces équations donnent donc les droites du plan d'équation $x = x^*$. Ce sont donc des droites verticales.

3.