CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit

$$f\ :\ (x,y,z)\longmapsto 8x^4-4xy+y^2-2yz+z^2-2z+4.$$

1. Montrer que f admet le point $P=\left(-\frac{1}{2},-1,0\right)$ comme unique point critique.
2. En négligeant les termes de degré 3 dans le développement de

$$f\left(-\frac{1}{2}+X,-1+Y,Z\right)-f\left(-\frac{1}{2},-1,0\right),$$

montrer qu'au voisinage de P, la différence $f\left(-\frac{1}{2}+X,-1+Y,Z\right)-f\left(-\frac{1}{2},-1,0\right)$ est du signe de

$$q(X,Y,Z)=12X^2-4XY+Y^2-2YZ+Z^2.$$

3. En déduire la nature du point P.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(S)\ :\ \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)+u(x,y)=0\\ u(x,0)=\sqrt{x}\end{cases},\qquad x,y\geqslant 0$$

et soit U l'unique fonction de deux variables (x,y) solution de (S).

1. Tracer dans le repère 1 l'intersection de la surface $\mathcal{S}_U$ avec le plan d'équation $y=0$.
2. Soit f_0 la fonction partielle définie par

$$\forall y\geqslant 0,\quad f_0(y)=U(0,y).$$

   (a) Calculer $f_0'(y)$ et en déduire une équation différentielle ordinaire vérifiée par f_0.
   (b) Montrer à l'aide de la condition initiale du système (S) que f_0 est la fonction nulle.
3. Soit f_2 la fonction partielle définie par

$$\forall y\geqslant 0,\quad f_2(y)=U(2,y).$$

(a) Déterminer une équation différentielle ordinaire et une condition initiale vérifiées par f_2.

(b) En déduire f_2 sous forme explicite et tracer la courbe associée dans le repère 1.

4. Déterminer et tracer de même les fonctions partielles

$$f_1 \,:\, y \mapsto U(1,y) \quad \text{et} \quad f_3 \,:\, y \mapsto U(3,y).$$

5. Montrer en s'inspirant des questions précédentes que l'unique solution de (S) est

$$U \,:\, (x,y) \longmapsto \sqrt{x}e^{-y}.$$

(On pourra fixer un $x \geqslant 0$ et considérer la fonction $f_x \,:\, y \mapsto U(x,y)$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit F le champs de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F \,:\, (x,y) \longmapsto (-3x^2 - y + 1, -x - 2y)$$

1. Montrer de F dérive d'un potentiel scalaire $-f$ à déterminer.
2. Montrer que $P_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $P_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ sont les seuls points critiques de f et donner leurs natures.
3. Considérons le code Sage ci-dessous :

```
1 Gf(x,y)=(-3*x**2-y+1,-x-2*y)
2 Champs = plot_vector_field(Gf(x,y),(x,0,1),(y,-1,1))
3 h = 0.01
4 P = (1,1)
5 Dessin = Champs + point([P,(2/3,-1/3)])
6 for k in range(100):
7   P = P + h*Gf(P)
8   Dessin = Dessin + point(P)
```

(a) Que contient la variable `Dessin` à l'issue de la ligne 5 ?

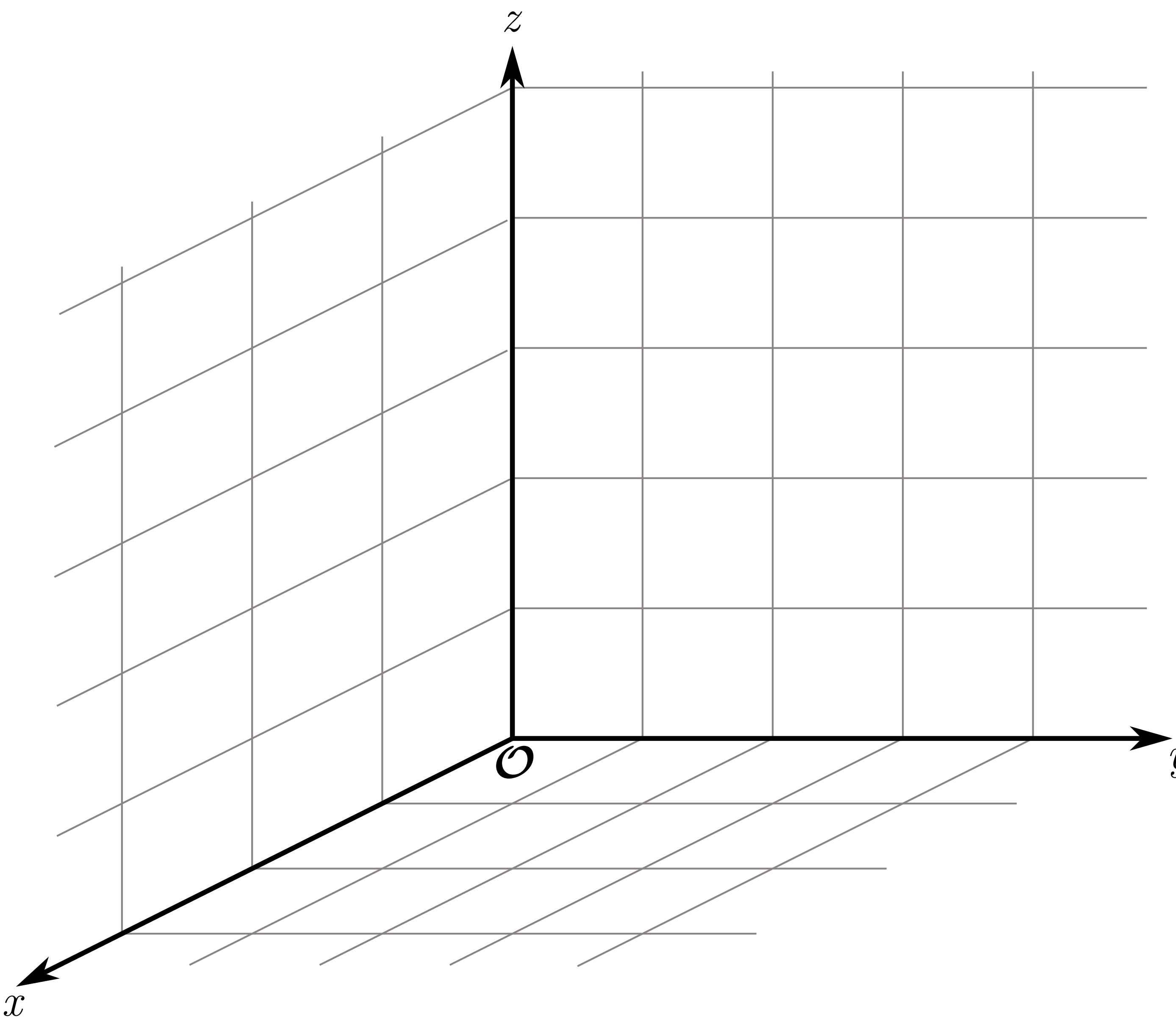
(b) Quel déplacement représente la substitution de la ligne 7 ?

(c) Tracer sur le champs de gradient ci-joint le dessin contenu dans la variable `Dessin` à la fin de la boucle.

(d) Quelles lignes ajouter au programme ci dessus pour obtenir, en plus du dessin en 2D, une image 3D du déplacement du point P sur la surface $\mathcal{S}_f$?

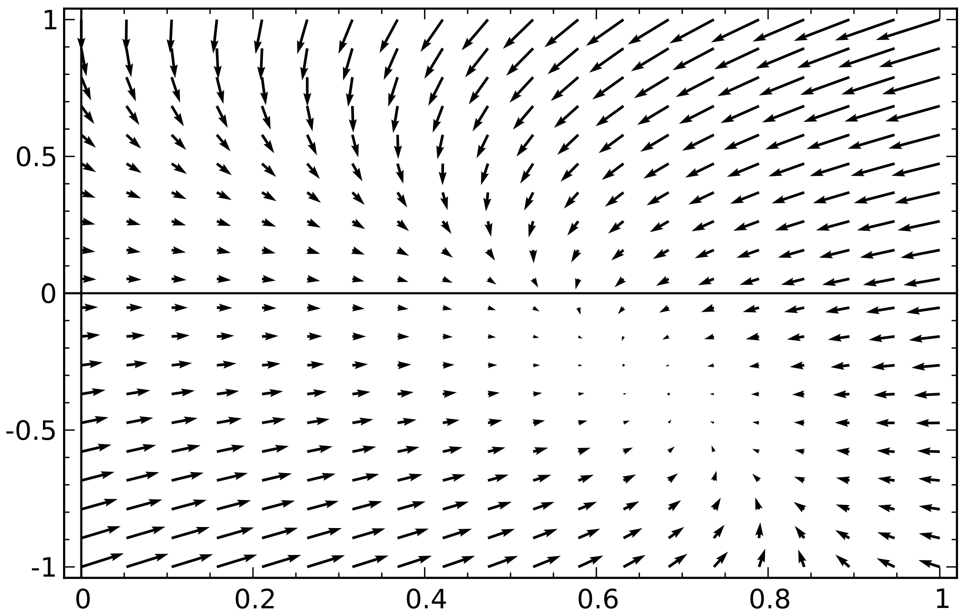
⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



Repère 1

NOM : .... Prénom : ....



Champs de gradient

CORRECTION

Exercice 1

1. Pour déterminer les points critiques de f, on calcule ses dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \quad 32x^3 - 4y \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -4x + 2y - 2z \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) &= -2y + 2z - 2 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc les solutions du système

$$\begin{cases} 8x^3 - y &= 0 & (L_1) \\ -2x + y - z &= 0 & (L_2) \\ -y + z - 1 &= 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 8x^3 & (L_1) \\ -2x &= 1 & (L_2) + L_3 \\ z &= 1 + y & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -\frac{1}{2} \\ y &= -1 \\ z &= 0 \end{cases}$$

f admet donc bien $P = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right)$ comme unique point critique.

2. On effectue le changement de variables $\begin{cases} x &= -\frac{1}{2} + X \\ y &= -1 + Y \\ z &= Z \end{cases}$ pour se placer au voisinage de P (quand X, Y et Z sont petits) et

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2} + X, -1 + Y, Z\right) - f\left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right) &= \left(-\frac{1}{2} + X\right)^4 - 4\left(X - \frac{1}{2}\right)(Y - 1) \\ &+ (Y-1)^2 - 2(Y-1)Z + Z^2 - 2Z + 4 - \frac{7}{2} \\ &= \frac{8}{2^4} - 4\frac{8}{2^3}X + 6\frac{8}{2^2}X^2 - 4XY + 4X + 2Y - 2 \\ &+ Y^2 - 2Y + 1 - 2YZ + 2Z + Z^2 - 2Z + \frac{1}{2} \\ &+ \text{ des termes de degré } \geqslant 3 \end{aligned}$$

En nettoyant l'expression, tous les termes de degrés $\leqslant 1$ disparaissent et l'on retrouve la forme quadratique q plus des termes de degré $\geqslant 3$.

3. Au voisinage de P, X, Y et Z sont petits et les termes de degré $\geqslant 3$ n'influencent plus le signe de la différence. Ce signe est donc donné par le signe de q, que l'on détermine à l'aide d'une mise sous forme canonique :

$$\begin{aligned} q(X,Y,Z) &= 12X^2 - 4XY + Y^2 - 2YZ + Z^2 \\ &= 12\left(X^2 - \frac{1}{3}XY\right) + Y^2 - 2YZ + Z^2 \\ &= 12\left(\left(X - \frac{1}{6}Y\right)^2 - \frac{1}{36}Y^2\right) + Y^2 - 2YZ + Z^2 \\ &= 12\left(X - \frac{1}{2}Y\right)^2 - \frac{1}{2}Y^2 + (Y - Z)^2 \end{aligned}$$

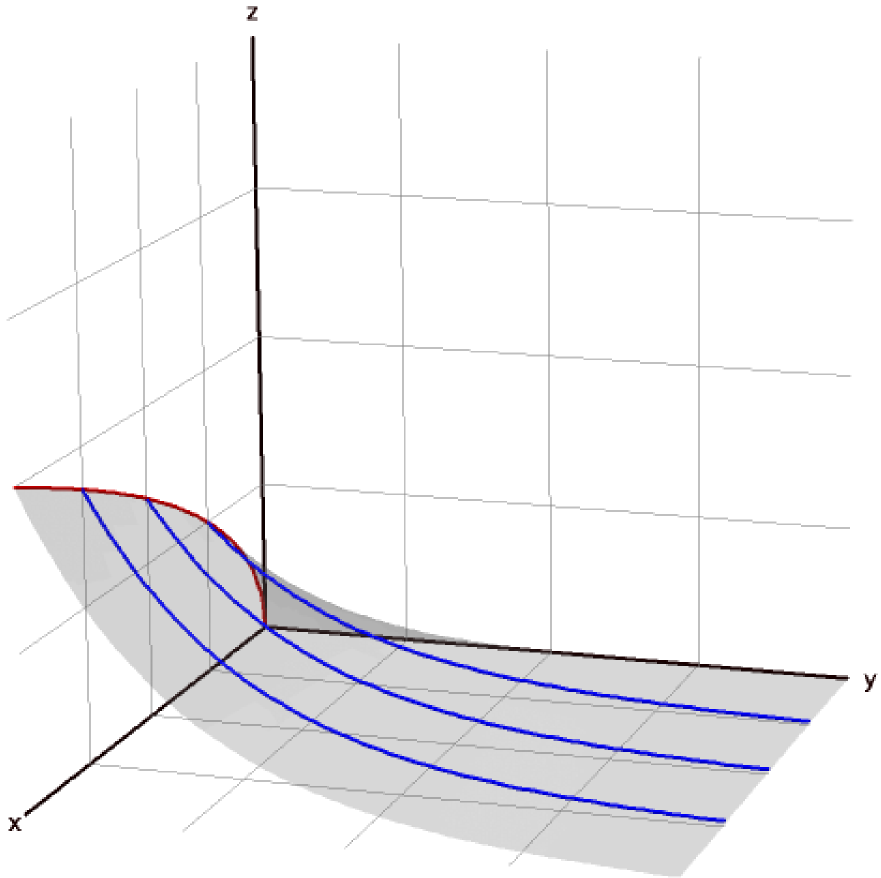
On obtient alors la signature $\sigma(q) = (2, 1)$. Puisque cette signature est “mixte”, le point P est un point selle. On peut trouver des directions dans lesquelles on $f(x, y, z)$ est toujours au dessus de $f(P)$ (par exemple en fixant fixant Y à 0 et donc y à -1) et d'autres dans lesquelles $f(x, y, z)$ est toujours au dessus de $f(P)$ (par exemple pour le long des points $\left(\frac{1}{2}Y, Y, Y\right)$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. L'intersection cherchée est la courbe de la fonction partielle $x \mapsto U(x, 0)$. C'est donc la courbe de la fonction racine.
2. (a)
$$f_0'(y) = \frac{\partial U}{\partial y}(0, y) = -U(0, y) = -f_0(y).$$
De plus $f_0(0) = U(0, 0) = \sqrt{0} = 0$. f_0 est donc l'unique solution du problème
$$\begin{cases} f' + f = 0 & (E) \\ f(0) = 0 & (C.I.) \end{cases}$$
f_0, comme toutes les solutions de (E), est donc de la forme $y \mapsto \lambda_0 e^{-y}$. La condition initiale impose de plus $\lambda_0 = 0$ et f_0 est bien la fonction nulle.

   (b) De même,
$$f_2'(y) = \frac{\partial U}{\partial y}(2, y) = -U(2, y) = -f_2(y).$$
f_2 est donc encore de la forme $y \mapsto \lambda_2 e^{-y}$. Cependant, la condition initiale est maintenant
$$f_2(0) = U(2, 0) = \sqrt{2}$$
donc $\lambda_2 = \sqrt{2}$ et $f_2 : y \mapsto \sqrt{2}e^{-y}$.
3. Par un raisonnement identique, on montre que
$$f_1 : y \mapsto e^{-y} \qquad \text{et} \qquad f_3 : y \mapsto \sqrt{3}e^{-y}$$
4. Par un raisonnement identique, si l'on fixe $x > 0$, la fonction partielle $f_x : y \mapsto U(x, y)$ vérifie
$$f_x'(y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = -U(x, y) = -f_x(y).$$
f_x est donc de la forme $f_x : y \mapsto \lambda_x e^{-y}$. D'autre part, puisque $f_x(0) = U(x, 0) = \sqrt{x}$, on obtient $\lambda_x = \sqrt{x}$ et
$$\forall (x, y), \quad U(x, y) = \sqrt{x}e^{-y}$$



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. F dérive d'un potentiel scalaire $-f$ s'il existe une fonction f de deux variables telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2+y-1 \qquad (1) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x+2y \qquad (2) \end{cases}$$

Or en intégrant l'expression (1) par rapport à x, on obtient

$$f(x,y) = x^3 + xy - x + k(y).$$

En dérivant par rapport à y cette dernière expression, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + k'(y).$$

En identifiant avec l'expression (2), on obtient $k'(y) = 2y$ et donc $k(y) = y^2 + \lambda$. N'ayant pas trouvé de contradiction, on obtient les fonctions f dont $-F$ est le gradient :

$$f(x,y) = x^3 + xy - x + y^2 + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Les points fixes de f sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x^2+y-1 &=& 0 \\ x+2y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 12y^2+y-1 &=& 0 \\ x &=& 2y \end{array}\right.$$

Le trinôme de la première équation a pour discriminent

$$\Delta = 49 > 0$$

et pour racines

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 12} = -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}.$$

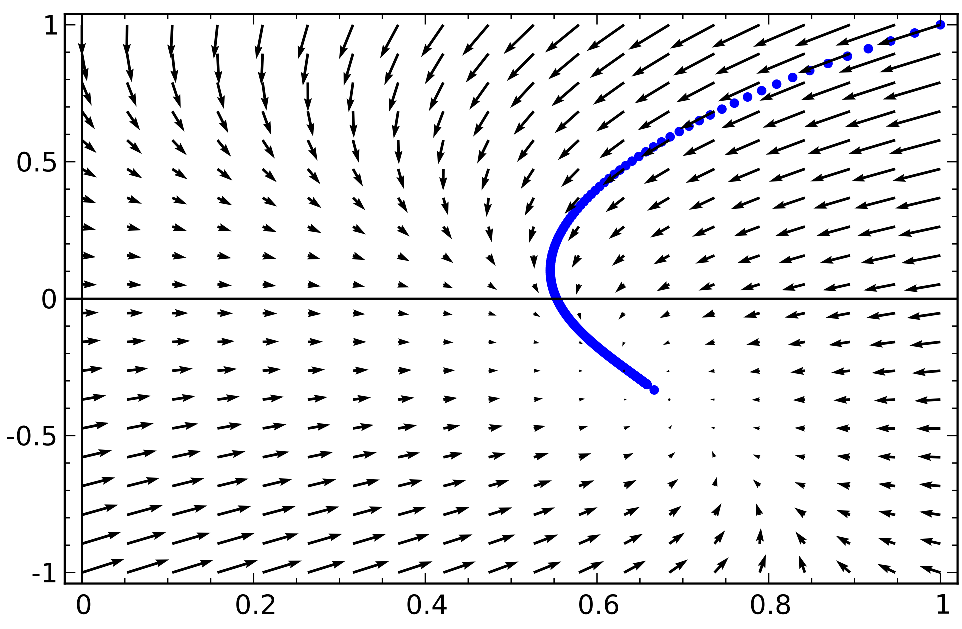
Grâce à la seconde équation, on obtient les points critiques cherchés.
On obtient la nature de ces points critiques à l'aide des dérivées partielles secondes de f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

D'où :

	P_1	P_2
r	4	-3
s	1	1
t	2	2
$s^2 - rt$	-7	7
Nature	minimum	selle

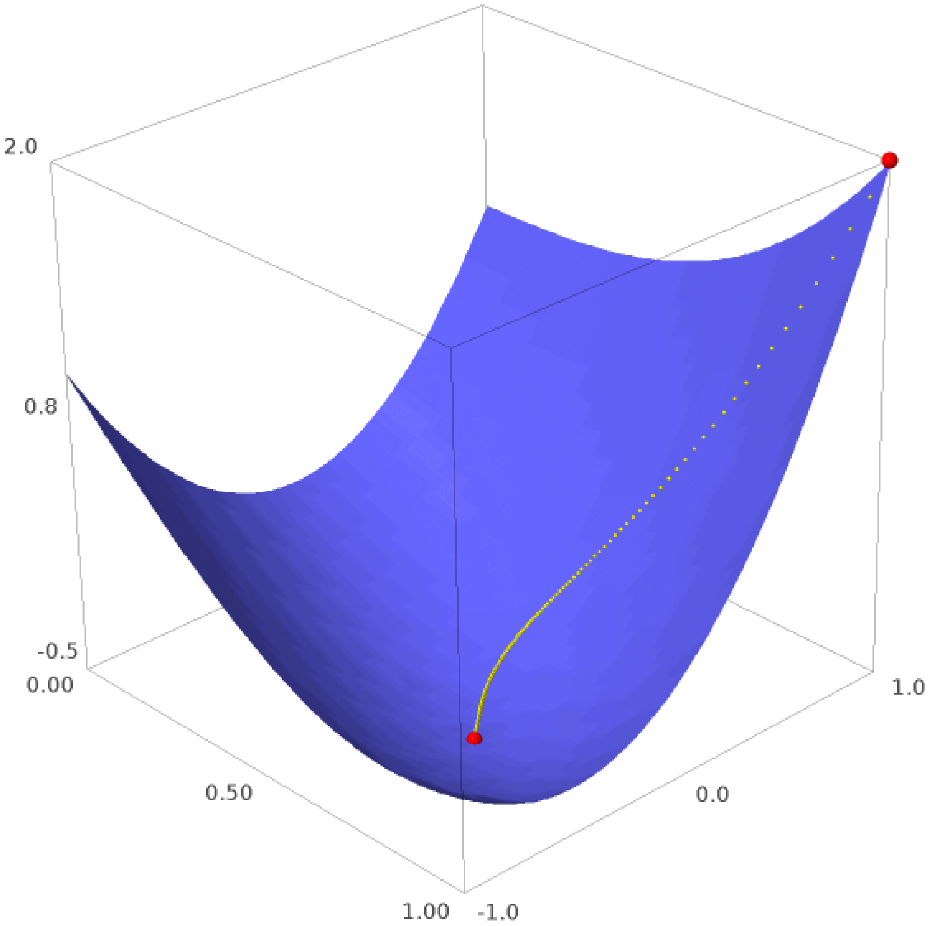
3. (a) À la ligne 5, la variable `Dessin` contient le champs de vecteurs F ainsi que les points $P = (1,1)$ et $P_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
   (b) À la ligne 7, le point P est déplacé dans le plan de base, le long du vecteur du champs F correspondant. Dans cette direction, P se déplace d'une distance de $h \times ||F(P)||$.
   (c)



(d) Pour obtenir une image 3D du déplacement, il faut ajouter les lignes rouges du programme ci-dessous :

```
Gf(x,y) = (-3*x**2-y+1,-x-2*y)
f(x,y) = x**3+x*y-x+y**2
Champs = plot_vector_field(Gf(x,y),(x,0,1),(y,-1,1))
Sf=plot3d(f(x,y),(x,0,1),(y,-1,1))
h = 0.01
P = (1,1)
P3D=(1,1,f(1,1))
Dessin = Champs + point([P,(2/3,-1/3)])
Dessin3D = Sf + point([P3D,(2/3,-1/3,f(2/3,-1/3))],color='red',size=20)
for k in range(100):
   P = P + h*Gf(P)
   Dessin = Dessin + point(P)
   Dessin3D = Dessin3D + point((P[0],P[1],f(P[0],P[1])),color='yellow')
```

On obtient alors le dessin 3D ci-dessous :



⋆ ⋆

⋆