CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit

$$f \,:\, (x,y) \longmapsto xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$

1. Déterminer et dessiner le domaine de définition de f.
2. Montrer que $P = (2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$ est l'unique point critique de f et déterminer sa nature.
3. On considère une boîte de volume 1 <u>sans couvercle</u> dont la base est un rectangle de dimensions $x \times y$.
   (a) Montrer que la surface totale de la boîte est donnée par la fonction f.
   (b) Donner les dimensions et la surface de la boîte de volume 1 ayant la plus petite surface et la dessiner.
   (c) Existe-t-il une boîte de volume 1 dont la surface est maximale ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$$

1. Montrer que le point $P = (1,1,-1)$ est l'unique point critique de f.
2. En développant l'expression $f(1+X, 1+Y, -1+Z)$, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de P.
3. En déduire sans calcul supplémentaire la matrice hessienne H de f en P.
4. Après avoir défini la matrice H dans `Sage`, la commande `H.eigenvectors_right()` donne le résultat suivant :

```
H.eigenvectors_right()
evaluate
```

$$\left[(1, [(0,1,1)], 1), \left(\sqrt{3}, \left[\left(1, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\right)\right], 1\right), \left(-\sqrt{3}, \left[\left(1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\right)\right], 1\right)\right]$$

   (a) En déduire la nature du point critique P.

(b) Donner une direction de l'espace à prendre à partir de P dans laquelle la fonction f augmente le plus rapidement.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 La loi de la gravitation universelle énonce que deux corps, dans l'espace ambiant ordinaire, s'attirent mutuellement avec une intensité proportionnelle au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de leur distance.

En vue d'étudier le mouvement relatif des deux corps sous cette interaction, on peut considérer, dans certaines limites, qu'il suffit de :

- décrire celui de leurs centres de gravité, en postulant que toute la masse de chacun d'eux est concentrée en son centre de gravité ;
- considérer comme fixe l'un d'entre eux et de décrire le mouvement relatif de l'autre ;
- représenter l'espace ambiant ordinaire par un espace affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé, $\mathcal{R} = (O\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, dont l'origine O coïncide avec le centre de gravité du corps fixé.

Via ces choix, nous obtenons un modèle mathématique simple de cette attraction entre un corps de masse M, réduit au point O, et un corps de masse m, réduit au point de coordonnées (x, y, z).

Précisément, on peut montrer qu'en chaque point de l'espace (hors de $(0, 0, 0)$), le corps de masse M exerce sur le corps de masse m une force d'attraction que l'on peut représenter par le vecteur

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-gMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-gMmy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-gMmz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

où g est une constante universelle d'attraction.

1. Montrer que l'intensité du champs F proposé vérifie bien la loi de gravitation universelle.
2. Montrer que le champ de vecteurs F dérive du potentiel f défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}, \quad f(x, y, z) = -\frac{gMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

3. Déterminer les surfaces de niveau de la fonction f ci dessus, i.e. les surface de l'espace d'équation $f(x, y, z) = h$.
4. Montrer qu'en chaque point P de l'espace, le vecteur $F(P)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OP}$ et en déduire la nature des lignes de champ.
5. Décrire le mouvement d'un objet de masse m placé sans vitesse initiale en un point de l'espace (hors de $(0, 0, 0)$) et soumis à l'attraction du centre O de masse M.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. La quantité $f(x,y)$ existe pour tout couple (x,y) tel que x et y soient non nuls. Le domaine de définition de f est donc l'ensemble du plan (xOy) privé des deux droites d'équations $x=0$ et $y=0$ (i.e. les axes du repère).
2. Les dérivées partielles de f sur son domaine sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{2}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{2}{y^2}$$

Ainsi, les points critiques de f sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} y - \dfrac{2}{x^2} & = & 0 \\ & & \\ x - \dfrac{2}{y^2} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{2}{x^2} \\ & & \\ x & = & \dfrac{1}{2}x^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{2}{x^2} \\ & & \\ x^3 & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{car } x \neq 0$$

Ainsi, f admet bien pour unique point critique le point $P=(x,y)$ défini par

$$x = 2^{\frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}}$$

Pour déterminer la nature de ce point critique, calculons coefficients r, s et t associés :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4}{x^3} \implies r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \implies s = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4}{y^3} \implies t = 2$$

Ainsi, le déterminant de la matrice hessienne de f en P est $rt - s^2 = 3 > 0$. Les valeurs propres de cette matrice sont donc de même signe et P est un extremum. Puisque $r = 2 > 0$, ces valeurs propres sont positives et P est un minimum.

3. (a) En notant z la hauteur de la boîte, sa surface totale est $S = xy + 2yz + 2xz$. Par ailleurs, son volume total est $V = xyz$. Puisque $V=1$, on a

$$xyz = 1 \iff z = \frac{1}{xy}$$

et la surface totale de la boîte devient

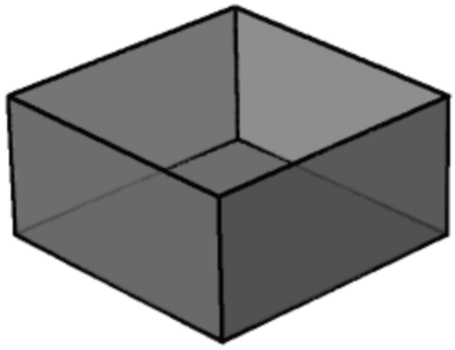
$$S = xy + 2\frac{y}{xy} + 2\frac{x}{xy} = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} = f(x,y)$$

(b) D'après la question 2, la fonction f admet un minimum en $P = (2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})$. Il existe donc une boîte de volume 1 dont la surface est minimale ; ses dimensions étant données par les coordonnées du point P :

$$x = 2^{\frac{1}{3}}, \quad y = 2^{\frac{1}{3}}, \quad z = \frac{1}{xy} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Par ailleurs, la surface de cette boîte est

$$S_{\min} = f\left(2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}\right) = 2^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} = 3 \times 2^{\frac{1}{3}}$$



(c) D'après l'expression de $f(x, y)$, on a $f(x, y) \longrightarrow +\infty$ quand l'une des deux coordonnées x ou y tend vers 0. Autrement dit, quitte en prendre l'une de ces deux mesures aussi petite que l'on veut, il est possible de construire une boîte de volume 1 ayant une surface aussi grande que l'on veut. Il n'existe donc pas de boite de volume 1 ayant une surface maximale.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Pour déterminer les points critiques de f, on doit annuler les dérivées partielles de f. Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = x + yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy - 1$$

Les points critiques de f sont donc les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + yz & = & 0 \\ xz + 1 & = & 0 \\ xy - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - \frac{1}{x^2} = 0 \\ z = -\frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 - 1 = 0 \\ z = -\frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ z & = & -1 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

$P = (1, 1, -1)$ est donc bien l'unique point critique de f.

2.

$$\begin{aligned}
f(1+X,1+Y,-1+Z) =& \frac{1}{2}(1+X)^2+(1+X)(1+Y)(-1+Z)+(1+Y)-(-1+Z) \\
=& \frac{1}{2}+X+\frac{1}{2}X^2-1+Z-Y-X-XY+XZ+YZ-XYZ \\
& +1+Y+1-Z \\
=& \frac{3}{2}+\frac{1}{2}X^2-XY+XZ+YZ-XYZ \\
=& f(1,1,-1)+\frac{1}{2}(X^2-2XY+2XZ+2YZ)+o(||(X,Y,Z)||^2)
\end{aligned}$$

3. D'après le calcul précédent, la matrice hessienne de f au point P est

$$H=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) D'après le résultat renvoyé par `Sage`, les valeurs propres de H sont$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\sqrt{3}$ et $\lambda_3=-\sqrt{3}$. Étant de signes différents, on en conclue que P est un point selle.

   (b) Pour faire augmenter la quantité $f(x,y,z)$ à partir du point P, il faut suivre les directions données par les vecteurs propres associés aux valeurs propres positives. Pour que cette augmentation soit la plus rapide, il faut s'appuyer sur la plus grande des valeurs propres, soit $\lambda_2=\sqrt{3}$. Or d'après le calcul effectué par `Sage`, les vecteurs propres associés à λ_2 sont les vecteurs de la droite portée par

$$\overrightarrow{e_2}=\left(1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. En un point matériel (x,y,z) de masse m de l'espace, l'intensité de la force modélisée par F est donnée par $||F(x,y,z)||$. Or

$$\begin{aligned}
||F(x,y,z)|| &= \sqrt{\frac{(gMmx)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}+\frac{(gMmy)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}+\frac{(gMmz)^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\
&= \frac{gMm}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{gMm}{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

   Cette intensité est donc bien proportionnelle
   - à la masse M,
   - à la masse m,
   - à l'inverse du carré de la distance $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ entre les deux masses.

2. Le champ F dérive du potentiel f de l'énoncé si et seulement si en chaque point (x, y, z) de l'espace, on a

$$F(x,y,z) = -\nabla f(x,y,z) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

Pour établir cette égalité, on peut alors calculer le gradient de f. Notons pour cela que f est symétrique en x, y et z. Il suffit donc de calculer l'une de ces trois dérivées partielles, par exemple la première, et d'échanger ensuite le rôle des variables pour obtenir les deux autres.
Or, vue comme fonction de x, l'expression $f(x,y,z)$ est de la forme $\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$. Sa dérivée est donc $-\frac{1}{2}.u'.u^{-\frac{3}{2}}$. D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{2}.(-gMm).(2x).(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{gMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On reconnaît ici l'opposé de la première fonction coordonnée de F.
En échangeant les rôles de x et y puis les rôles de x et z dans l'expression ci-dessus, on obtient successivement la deuxième puis la troisième dérivée partielle de f :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{gMmy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{gMmz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On reconnaît ici l'opposé des autres fonctions coordonnées de F. On en déduit donc que $\nabla f = -F$ et F dérive bien du potentiel f.

3. Les surfaces de niveau de f sont les surfaces de l'espace d'équations

$$f(x,y,z) = k \iff -\frac{gMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = k \iff \sqrt{x^2+y^2+z^2} = -\frac{gMm}{k}$$

Ainsi, si $k \geqslant 0$, la surface de niveau associée est l'ensemble vide et si $k < 0$, la surface de niveau est la surface d'équation

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = -\frac{gMm}{k} \iff x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{gMm}{k}\right)^2$$

On reconnaît ici l'équation de la sphère de centre O et de rayon $-\dfrac{gMm}{k}$.

4. Par définition, on a

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-gMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-gMmy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-gMmz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{-gMm}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)$$

Le vecteur $F(x,y,z)$ est donc toujours colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$. Les lignes du champ F étant les lignes de l'espace tangentes en chaque point (x,y,z) au vecteur $F(x,y,z)$, on en déduit que ces lignes de champ sont les droites de l'espace passant par O.

5. Si le champ de force F représente la seule force exercée sur un point matériel de masse m placé en un point (x, y, z) de l'espace, celui ci subit une accélération dirigée vers le centre du repère. Il commence donc à se déplacer en ligne droite vers le point O. Au bout d'un temps infinitésimal dt, il atteint un nouveau point de l'espace auquel le vecteur du champ F est encore dirigé vers le centre du repère. A cet instant, le point de masse m subit une accélération colinéaire à son vecteur vitesse. Donc il accélère.

   Ainsi, le point de masse m se dirige en accélérant vers le centre O.

   Notons qu'en outre, l'accélération augment au fur et à mesure que le point de masse m se rapproche de O. La vitesse augmente donc bien plus rapidement que dans le cas d'un mouvement à accélération constante.

⋆ ⋆
⋆