CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

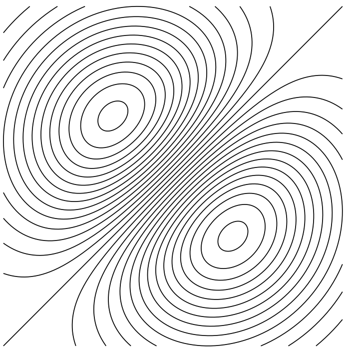
1. Montrer que les points critiques de f sont

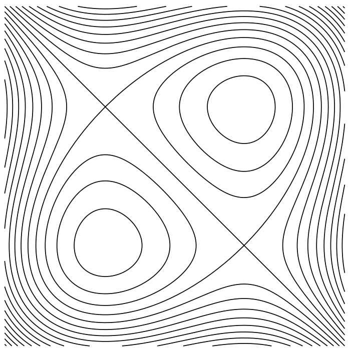
$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \qquad \text{et} \qquad P_2 = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

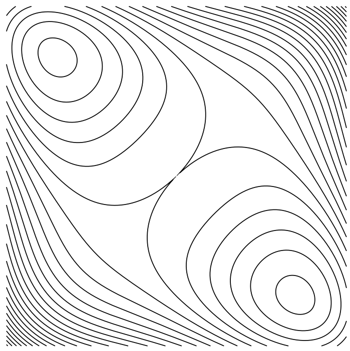
2. Déterminer la nature des points critiques P_1 et P_2.
3. *Étude du point* P_0
   (a) Déterminer une droite $\mathcal{D}$ du plan (xOy) telle que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \qquad f(x,y) > 0$$

   (b) Montrer que tout voisinage de P_0 contient des points (x,y) tels que $P(x,y) < 0$.
   (c) En déduire la nature du point P_0.
4. En accord avec l'étude précédente, determiner, parmi les cartes ci-dessous, celle de la fonction f autour de ses points critiques.


A


B


C

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = xy + yz + 2zx - xyz$$

1. Montrer que les points critiques de f sont

$$P_1 = (0,0,0) \qquad \text{et} \qquad P_2 = (2,4,2)$$

2. (a) Donner sans calcul le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 en P_1.
   (b) En déduire la matrice hessienne $H_f(P_1)$.
   (c) Déterminer les valeurs propres de $H_f(P_1)$ et en déduire la nature du point P_1.
3. (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au point P_2.
   (b) En déduire la matrice hessienne de $H_f(P_2)$ et en déduire la nature du point P_2.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Un changement de variables de* $\mathbb{R}^2$

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$

le changement de variable $(x,y) \rightsquigarrow (u,v)$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} u(x,y) & = & x & - & \alpha y \\ v(x,y) & = & & & y \end{array} \right.$$

(a) Montrer que le champ de vecteurs réciproque de Φ est le champ $\Phi^{-1} : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x(u,v) & = & u & + & \alpha v \\ \\ y(u,v) & = & & & v \end{array} \right.$$

(b) Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de variables (x,y), en notant

$$\tilde{f} : (u,v) \longmapsto f(u+\alpha v, v)$$

les vecteurs ∇f et $\nabla \tilde{f}$ sont liés par une relation matricielle de la forme

$$\nabla \tilde{f}(u,v) = N \times \nabla f(u+\alpha v, v)$$

où N est une matrice 2×2 à déterminer.

<u>Indication</u> : puisque $\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ et $\nabla \tilde{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \end{pmatrix}$ on pourra commencer par exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$).

2. *Application à une équation aux dérivées partielles*

Soit

$$(E) : \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

l'équation aux dérivées partielles d'inconnue f.

(a) Montrer que si f est une solution de (E), alors la fonction

$$\tilde{f} : (u,v) \longmapsto f(u+\alpha v, v)$$

vérifie l'équation

$$(E) : \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = 0$$

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\tilde{E})$ et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Un point $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$(S) \, : \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ & & \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4x^3 - 4(x-y) & = & 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = x - x^3 \\ (x-x^3)^3 + (x - (x - x^3)) = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} y = x - x^3 & & \\ 2x^3 - 3x^5 + 3x^7 - x^9 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = x - x^3 \\ x^3(2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y = x - x^3 \\ 2 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = 0 \end{array}\right.$$

En effectuant le changement de variable $X = x^2$ dans la seconde équation du second système, on obtient le polynôme

$$Q(X) = -X^3 + 3X^2 - 3X + 2$$

dont 2 est une racine évidente. La factorisation de ce polynôme par $X - 2$ produit

$$Q(X) = (X-2)(-X^2 + X - 1)$$

Or, le polynôme $-X^2 + X - 1$ n'ayant pas de racine réelle, on obtient

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} y & = & x - x^2 \\ x^2 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sqrt{2} \\ y & = & \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad = \quad -\sqrt{2} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\sqrt{2} \\ y & = & -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad = \quad \sqrt{2} \end{array}\right.$$

et l'on retrouve les trois points critiques proposés.

2. Pour déterminer la nature des points critiques P_1 et P_2, on calcule les dérivées partielles secondes de f en ces deux points. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 12x^2 - 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & = & 4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 12y^2 - 4 \end{array}\right.$$

D'où

- Étude du point P_1 :

$$r_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = 20, \quad s_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) = 4, \quad t_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = 20$$

$$\Delta_1 = r_1 t_1 - s_1^2 = 400 - 16 > 0$$

donc P_1 est un extremum. De plus, puisque $r_1 = 20 > 0$, le point P_1 est un minimum.

- Étude du point P_2 :

$$r_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = 20 = r_1, \quad s_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) = 4 = s_1, \quad t_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_2) = 20 = t_1$$

D'où $\Delta_2 = \Delta_1$ et P_2 est également un minimum.

3. (a) D'après l'expression de $f(x,y)$, pour tout point $P=(x,y)$ appartenant à la droite du plan de base d'équation $y=x$, on a
$$f(P)=f(x,x)=2x^4>0$$
   (b) Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage du point P_0 est
$$f(x,y)=-2(x-y)^2+o(||(x,y||^2)$$
   Ainsi, quitte à être assez proche de P_0, le signe de $f(x,y)$ dépend uniquement du signe de $-2(x-y)^2$, soit négatif.
   (c) Tout voisinage de P_0 contient des couples (x,y) tels que $f(x,y)<0$ et des couples (x,y) tels que $f(x,y)>0$. P_0 est donc par définition un point selle de f.
4. La carte B ne peut correspondre à la carte de f puisque les extrema (reconnaissables aux courbes de niveaux fermées) ne se situent pas sur la droite d'équation $y=-x$ (à laquelle appartiennent les points P_1 et P_2).
   Par ailleurs, la carte A ne présente pas de point selle. La carte de f est donc la carte C.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.
$$(S):\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=&0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=&0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}y+2z-yz&=&0\\x+z-xz&=&0\\y+2x-xy&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{lcll}y+z(2-y)&=&0&(1)\\x+z(1-x)&=&0&(2)\\y+x(2-y)&=&0&(3)\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{lcll}y+z(2-y)&=&0&(1)\\x+z(1-x)&=&0&(2)\\(x-z)(2-y)&=&0&(3')=(3)-(1)\end{array}\right.$$
La troisième équation de ce système équivaut à
$$y=2\qquad\text{ou}\qquad x=z$$
Or la première condition, associée à l'équation (1) produit également l'équation $y=0$, ce qui est incompatible avec la première condition. Ainsi,
$$(S)\iff\left\{\begin{array}{l}z=x\\x+x(1-x)=0\\y(1-z)+2z=0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{l}z=x\\x(2-x)=0\\y=\frac{2z}{z-1}\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&0\\z&=&0\\y&=&0\end{array}\right.\text{ ou }\left\{\begin{array}{lcl}x&=&2\\z&=&2\\y&=&4\end{array}\right.$$
On retrouve ici les deux points critiques proposés.

2. (a) Le développement limité de f en $P_1=(0,0,0)$ s'obtient en négligeant les termes de degrés >2 ainsi :
$$f(x,y,z)=xy+yz+2xz+o(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}(2xy+2yz+4xz)+o(x^2+y^2+z^2)$$

(b) D'après le D.L. ci dessus, on a

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Les valeurs propres de la matrice $H_f(P_1)$ sont par définition les solution de l'équation polynomiale $\det(H_f(P_1) - \lambda I_2) = 0$ d'inconnue λ. Or

$$\begin{aligned}
\det(H_f(P_1) - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda - 2 & 0 & 2+\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\
&= (\lambda+2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+2)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} && (C_3 \leftarrow C_3 + C_1) \\
&= -(\lambda+2)(-\lambda(2-\lambda) - 2) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda - 2)
\end{aligned}$$

Un calcul de discriminant produit alors les valeurs propres

$$\lambda_1 = -2 < 0, \qquad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3} < 0, \qquad \lambda_3 = 1 + \sqrt{3} > 0$$

Ces valeurs propres étant de signes différents, le point P_1 est un point selle.

3. On peut obtenir le développement limité de f au point P_2 à l'aide du changement de variables

$$(x, y, z) = (2 + X, 4 + Y, 2 + Z)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(2+X, 4+Y, 2+Z) =& (2+X)(4+Y) + (4+Y)(2+Z) + 2(2+X)(2+Z) - (2+X)(4+Y)(2+Z) \\
=& 8 + 4X + 2Y + XY + 8 + 2Y + 4Z + +YZ + 4 + 4X + 4X + 4Z + 2XZ \\
& - 16 - 8X - 4Y - 8Z - 2XY - 2YZ - 4XZ - XZY \\
=& 4 - XY - YZ - 2XZ + -XYZ)
\end{aligned}$$

Puisque $f(2, 4, 2) = 4$, on retrouve le développement limité

$$f(2+X, 4+Y, 2+Z) - f(P_2) = -XY - YZ - 2Xo(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

et

$$H_f(P_2) = -H_f(P_1)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont donc (sans calcul) $2,\ -1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3}$. Elles sont là encore de signes différents et P_2 est également un point selle.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On obtient le champ de vecteurs Φ^{-1} inversant le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{lllll} u & = & x & - & \alpha y \\ v & = & & & y \end{array} \right.$$

D'où

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{lllllllll} x & = & u & + & \alpha y & = & u & + & \alpha v \\ y & = & v & & & & & & \end{array} \right.$$

On retrouve ainsi les expressions proposées pour $x(u, v)$ et $y(u, v)$.

2. Soit f une fonction de variables (x, y) et $\tilde{f}$ la fonction définie par

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) = f(u + \alpha v, v)$$

D'après la formule de dérivation des fonctions composées de plusieurs variables, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) & = & \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha v, v) \quad + \quad \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha v, v) \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) & = & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha v, v) \quad + \quad \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v).\dfrac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha v, v) \end{array} \right.$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha v, v) \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) & = & \alpha.\dfrac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha v, v) \quad + \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha v, v) \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = N \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha v, v) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha v, v) \end{pmatrix}$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) D'après la question précédente, si f est une solution de l'équation

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(u+\alpha v, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+\alpha v, v) = 0$$

On reconnaît dans le membre de gauche de cette équation la dérivées partielle $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$ et l'on obtient l'équation $(\tilde{E})$ cherchée.

(b) Les solutions de $(\tilde{E})$ sont les fonctions de variables (u, v) ne dépendant pas de v :

$$\tilde{f} \,:\, (u,v) \longmapsto k(u)$$

pour toute fonction k d'une variable réelle.

D'après l'expression du champ de vecteurs Φ, les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$f \,:\, (x,y) \longmapsto k(x - \alpha y)$$

pour toute fonction k d'une variable réelle.

⋆ ⋆
⋆