CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit
$$f\ :\ (x,y) \longmapsto x^3+3xy^2+2y^3+3x^2$$

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Montrer que les points critiques de f sont
$$P_0=(0,0),\qquad P_1=(-1,1),\qquad P_2=(-2,0)$$
3. *Étude des points P_1 et P_2*
   (a) Calculer les dérivées partielles secondes
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$
   (b) i. Donner la matrice hessienne $\mathcal{H}_f(P_1)$.
   ii. Déterminer la nature du point critique P_1.
   (c) i. Donner la matrice hessienne $\mathcal{H}_f(P_2)$.
   ii. Déterminer la nature du point critique P_2.
4. *Etude du point P_0*
   (a) Montrer que tout voisinage du point P_0 contient des points (x,y) tels que $f(x,y)>0$ et des points (x,y) tels que $f(x,y)<0$.
   (b) En déduire la nature du point P_0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit
$$f\ :\ (x,y,z) \longmapsto z(e^x-1)-y^2$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Montrer que f admet un unique point critique P_0 à déterminer.

3. À l'aide des développements limités usuels, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en P_0.
   Ind. : on rappelle que, au voisinage de $u = 0$, on a
   $$e^u = 1 + u + u^2 + o(u^2)$$
4. En déduire la matrice hessienne $\mathcal{H}_f(P_0)$.
5. Déterminer les valeurs propres de $\mathcal{H}_f(P_0)$ et en déduire la nature du point critique P_0.
6. Quelle direction de l'espace $\mathbb{R}^3$ doit-on suivre à partir du point P_0 pour que la quantité $f(x, y, z)$ augmente le plus vite possible ? Justifier.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Un calcul préliminaire*
   Déterminer l'ensemble des fonctions $\tilde{f}$ de deux variables (u, v) telles que
   $$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$
2. Soit c une constante strictement positive. On souhaite déterminer toutes les fonctions f de deux variables (x, t) vérifiant l'équation
   $$(E) \,:\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$
   et l'on considère le changement de variables $(x, y) \rightsquigarrow (u, v)$ défini par
   $$\begin{array}{rccc} \Phi \ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, t) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} u(x, t) & = & x + ct \\ v(x, t) & = & x - ct \end{array} \right. \end{array}$$
   (a) Déterminer les fonctions coordonnées $x(u, v)$ et $t(u, v)$ de la bijection
   $$\begin{array}{rccc} \Phi^{-1} \ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x(u, v), t(u, v)) \end{array}$$
   (b) Soient f une fonction des variables (x, t) et
   $$\tilde{f} \,:\, (u, v) \longmapsto f(x(u, v), t(u, v))$$
      i. Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u, v)$ en fonction des dérivées partielles de f.
      ii. Montrer que si f vérifie l'équation (E), alors
      $$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$$
      iii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. On a

$$\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 3x^2+3y^2+6x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 6xy+6y^2\end{array}\right.$$

2. Par définition, les points critiques de f sont les solutions du système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{l}3x^2+3y^2+6x=0 \\ 6xy+6y^2=0\end{array}\right.$$

Or

$$\begin{array}{lll}(S) & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}x^2+y^2+2x=0 \\ y(x+y)=0\end{array}\right. \\ \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}y=0 \\ x^2+2x=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x+y=0 \\ x^2+y^2+2x=0\end{array}\right. \\ \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}y=0 \\ x=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=0 \\ x=-2\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=-x \\ 2x^2+2x=0\end{array}\right. \\ \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}y=0 \\ x=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}y=0 \\ x=-2\end{array}\right. \text{ ou } \cancel{\left\{\begin{array}{l}x=0 \\ y=0\end{array}\right.} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}x=-1 \\ y=1\end{array}\right.\end{array}$$

On retrouve ainsi les trois points annoncés.

3. (a) On a

$$\begin{array}{lll}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & = & 6x+6 \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & = & 6y \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) & = & 6x+12y\end{array}$$

(b) i. Par définition, on a

$$\mathcal{H}_f(P_1)=\left(\begin{array}{cc}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}0 & 6 \\ 6 & 6\end{array}\right)$$

ii. Le déterminant de cette matrice est $\det(\mathcal{H}_f(P_1))=-36<0$. Ses deux valeurs propres sont donc de signes contraires et P_1 est un point selle.

(c) i. On a

$$\mathcal{H}_f(P_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

ii. Les deux valeurs propres de cette matrice sont -6 et -12. Elles sont donc toutes deux négatives et P_2 est un maximum.

4. (a) Si l'on fixe $x = 0$, on a

$$f(0, y) = 2y^3$$

dont le signe dépend du signe de y. Or tout voisinage du point P_0 contient des points dont l'abscisse est nulle et dont l'ordonnée est positive et des points dont l'abscisse est nulle et dont l'ordonnée est négative.

(b) Ainsi, à partir du point P_0, il est possible de faire augmenter ou diminuer la quantité $f(x, y)$ selon que l'on suive l'axe des ordonnées en montant ou en descendant. Autrement dit, le point P_0 est un point selle.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = ze^x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^x - 1$$

2. Les points critiques de f sont les solutions du système

$$(S) : \begin{cases} ze^x = 0 \\ -2y = 0 \\ e^x - 1 = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

La fonction f admet donc le point $P_0 = (0, 0, 0)$ comme unique point critique.

3. D'après le développement limité de la fonction exponentielle en 0, lorsque (x, y, z) est proche de P_0, on a x proche de 0 et

$$f(x, y, z) = z(\cancel{1} + x + x^2 + o(x^2) - \cancel{1}) - y^2 = zx - y^2 + o(x^2 + y^2 + z^2)$$

4. D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a

$$\mathcal{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Les valeurs propres de $\mathcal{H}_f(P_0)$ sont les racines du polynôme

$$\det(\mathcal{H}_f(P_0) - \lambda.I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -(2+\lambda)(\lambda^2-1) \\ &= -(2+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{H}_f(P_0)$ sont donc -2, -1 et 1. Puisqu'elles ne sont pas toutes de même signe, le point P_0 est un point selle.

6. Pour faire augmenter le plus rapidement possible la quantité $f(x, y, z)$ à partir du point P_0, il faut suivre, dans $\mathbb{R}^3$, le sous espace propre associé à la valeur propre positive, soit 1. Or

$$AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & x \\ -2y & = & y \\ x & = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z & = & x \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où

$$E_1 = \{(x, 0, x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

et l'on peut par exemple suivre le vecteur $(1, 0, 1)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. En intégrant l'équation donnée par rapport à la variable v, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}(u, v) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(u, v) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v) = \varphi(u)$$

où φ est une fonction quelconque d'une variable.

En intégrant cette nouvelle égalité par rapport à u, on obtient

$$f(u, v) = \Phi(u) + \Psi(v)$$

où Φ est une primitive de φ et Ψ est une fonction quelconque d'une variable.

2. (a) On a

$$\left\{ \begin{array}{lclc} u & = & x + ct & (E_1) \\ v & = & x - ct & (E_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lclc} x & = & \dfrac{u+v}{2} & \dfrac{(E_1)+(E_2)}{2} \\ & & & \\ t & = & \dfrac{u-v}{2c} & \dfrac{(E_1)-(E_2)}{2c} \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1} \; : \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x(u,v) = \dfrac{u+v}{2} \\ \\ t(u,v) = \dfrac{u-v}{2c} \end{array} \right. \end{array}$$

(b) i. Si $\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), t(u,v)) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$, on a

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$$

ii. D'après le calcul précédent, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}(u,v) =& \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right)(u,v) \\ \\ =& \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) + \cancel{\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)} \\ & - \cancel{\frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)} - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) \\ \\ =& \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, si f est une solution de (E), la parenthèse est nulle et la fonction $\tilde{f}$ vérifie l'égalité souhaitée.

iii. D'après les questions précédentes, la fonction $\tilde{f}$ est alors de la forme

$$\tilde{f} \; : \; (u,v) \longmapsto \Phi(u) + \Psi(v)$$

où Φ et Ψ sont deux fonctions quelconques d'une variable. En appliquant le changement de variables $(u,v) \rightsquigarrow (x,t)$, on obtient

$$f \; : \; (x,t) \longmapsto \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

⋆ ⋆
⋆