CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

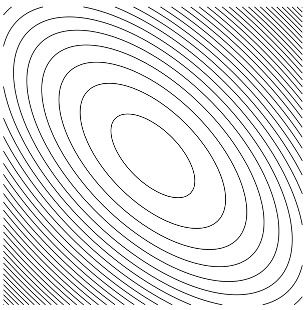
Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par

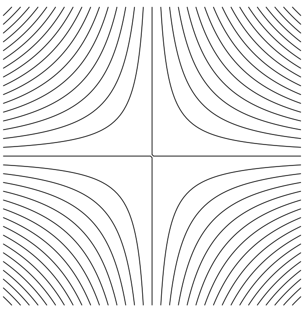
$$f(x,y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D_f$.
3. Montrer que les points critiques de f sont $P_1 = (1,1)$ et $P_2 = (1,-1)$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes de f en tout point $(x,y) \in D_f$.
5. Donner les matrices hessiennes de f en P_1 et P_2.
6. En déduire la nature des points critiques de f.
7. Parmi les cartes ci-dessous, laquelle correspond à la fonction f au voisinage de P_1 ? Justifier.

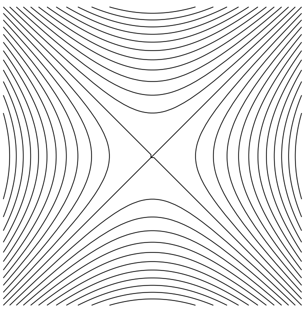
Carte 1



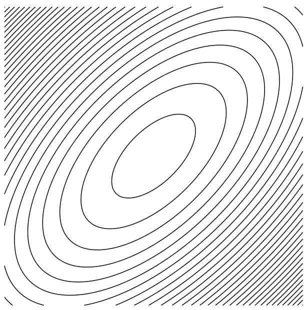
Carte 2



Carte 3



Carte 4



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *Régression linéaire*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, on note A, B et C les trois points de coordonnées respectives

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

On souhaite déterminer la droite Δ du plan qui passe au plus près de chacun des points A, B et C, i.e. la droite d'équation

$$\Delta \,:\, y = ax + b$$

telle que <u>la somme des carrés des distances verticales</u> de chacun des points A, B et C à Δ soit la plus petite possible.

1. *Une estimation graphique*
   (a) Placer les points A, B et C dans un repère.
   (b) Tracer "a l'œil" la droite Δ cherchée.

2. *Détermination analytique*
   (a) Déterminer en fonction de a, b, x_0 et y_0 la distance verticale d'un point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ à la droite $\Delta \,:\, y = ax + b$.
   (b) Montrer que les coefficients a et b qui définissent la droite Δ que l'on cherche correspondent aux coordonnées du minimum de la fonction

   $$f \,:\, (x, y) \longmapsto (-x + y)^2 + (x + y - 1)^2 + (2x + y - 2)^2$$

   (c) Montrer que la fonction f ci-dessus admet un unique point critique et que c'est un minimum.
   (d) En déduire l'équation de la droite Δ.

3. Ajouté à votre dessin la droite déterminée par le calcul précédent et comparer avec votre estimation.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 Soient φ et ψ deux fonctions d'une variable réelle définies sur $\mathbb{R}$. On note f la fonction de deux variables (x, y) définie par

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_*^+) \times \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x.\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction des dérivées φ' et ψ'.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f en fonction des dérivées de φ et ψ.
3. Montrer que f est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

$\star\ \star$
$\star$

CORRECTION

Exercice 1 :

1. $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
2. $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{y}(e^{-x} - xe^{-x}) = \frac{(1-x)e^{-x}}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e} \end{aligned}$$
3. Par définition, les points critiques de f sont les solutions du système d'équations $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. D'où

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{(1-x)e^{-x}}{y} & = & 0 \\ -\dfrac{xe^{-x}}{y^2} + \dfrac{1}{e} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x-1 & = & 0 \\ -\dfrac{xe^{-x}}{y^2} + \dfrac{1}{e} & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ -\dfrac{e^{-1}}{y^2} + \dfrac{1}{e} & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ -1 + y^2 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & \pm 1 \end{array}\right.$$

Les points critiques de f sont donc $P_1 = (1,1)$ et $P_2 = (1,-1)$.

4. Pour obtenir les dérivées partielles secondes de f, on dérive les dérivées partielles premières obtenues ci-dessus. Ainsi,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{1}{y}(-e^{-x} - (1-x)e^{-x}) = \frac{(x-2)e^{-x}}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{(x-1)e^{-x}}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{2xe^{-x}}{y^3}$$

5. D'après les calculs précédents, on a

$$\mathcal{H}_f(P_1) = \mathcal{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_f(P_2) = \mathcal{H}_f(1,-1) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

6. Les matrices ci-dessus étant diagonales, on retrouve leurs valeurs propres respectives sur ces diagonales. Ainsi, dans les deux cas, les valeurs propres sont de signes différents. Les points P_1 et P_2 sont donc des points selles.

7. Le point P_1 étant un point selle, il ne peut s'agir des cartes 1 et 4. Par ailleurs, la matrice $\mathcal{H}_f(P_1)$ étant diagonale, ses sous espaces propres sont parallèles aux axes du repère. Ces axes donnent donc le sens dans lequel la fonction f varie le plus vite. La ligne de niveau $f(P_1)$ ne peut donc être tangente à ces directions. Il s'agit donc de <u>la carte 3</u>.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.

2. (a) La distance verticale d'un point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ du plan avec la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est la distance entre le point M et le point de Δ d'abscisse x, soit le point $M' = \begin{pmatrix} x_0 \\ ax_0 + b \end{pmatrix}$, i.e. valeur absolue de la différence entre leurs ordonnées. D'où

$$d_v(M, \Delta) = |ax_0 + b - y_0|$$

(b) La quantité que l'on cherche à minimiser est, d'après la formule ci-dessus

$$d_v(A, \Delta)^2 + d_v(B, \Delta)^2 + d_v(C, \Delta)^2 = (-a + b)^2 + (a + b - 1)^2 + (2a + b - 2)^2$$

On retrouve ici la fonction proposée, évaluée en (a, b).

(c) On déterminer le(s) point(s) critique(s) de f à l'aide de ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2(-x + y) + 2(x + y - 1) + 4(2x + y - 2) = 12x + 4y - 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(-x + y) + 2(x + y - 1) + 2(2x + y - 2) = 4x + 6y - 6$$

Les points fixes de f sont donc les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 2y & = & 5 \\ 2x + 3y & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -7y & = & -4 \\ 2x + 3y & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{4}{7} \\ & & \\ x & = & \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{15}{7} \end{array} \right.$$

Ainsi, f admet pour unique point fixe le point $P = \left(\frac{15}{7}, \frac{4}{7}\right)$. D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}_f(P) = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det(H) = 56 > 0$$

Le point P est donc un extremum. Comme de plus

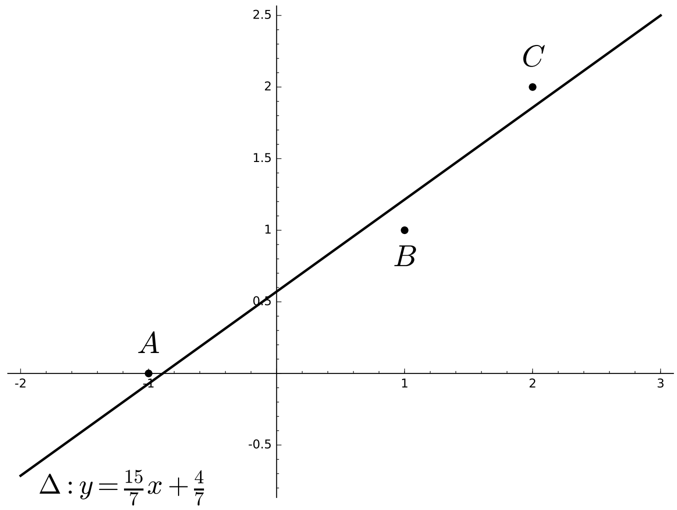
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 12 > 0$$

P est bien un minimum.

(d) D'après les calculs précédents, la droite de régression des trois points A, B et C est la droite Δ, d'équation

$$\Delta \ : \ y = \frac{15}{7}x + \frac{4}{7}$$

D'où



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. D'après les formules de dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x.\left(-\frac{y}{x^2}\right)\psi'\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + x.\frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \cancel{\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)} + \cancel{\frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y^2}{x^3}\psi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= 2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}\psi''\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= -\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \cancel{\frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)} - \cancel{\frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)} - \frac{y}{x^2}\psi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\psi''\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. D'après les calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}
x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =& 2\cancel{\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x}\psi''\left(\frac{y}{x}\right)}\\
&\cancel{-2\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}-2\cancel{\frac{y^2}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)}-2\cancel{\frac{y^2}{x}\psi''\left(\frac{y}{x}\right)}\\
&+\cancel{\frac{y^2}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)}+\cancel{\frac{y^2}{x}\psi''\left(\frac{y}{x}\right)}\\
=&0
\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆