CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Fonctions de plusieurs variables

Nom : .... Prénom : ....

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y^2 - x^2y + x^2 \end{array}$$

On souhaite étudier ici les valeurs extrèmes de f sur le domaine $\mathcal{D}$ du plan défini par

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$$

1. *À l'intérieur de $\mathcal{D}$*
   (a) Dessiner le domaine $\mathcal{D}$.
   (b) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   (c) Montrer f admet le point $P_0 = (0,0)$ comme unique point critique à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$.
   (d) Donner sans calcul le développement limité d'ordre 2 de f en P_0.
   (e) En déduire la matrice hessienne $H_f(P_0)$ et la nature du point P_0.

2. *Au bord du domaine $\mathcal{D}$*
   On note

$$X_1 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t^2-1) \end{array} \quad \text{et} \quad X_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, 1-t^2) \end{array}$$

   (a) Ajouter au dessin les courbes du plan décrites par les ensembles

$$\mathcal{C}_1 = \{X_1(t),\ t \in [-1,1]\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2 = \{X_2(t),\ t \in [-1,1]\}$$

   (b) Montrer que f est constante égale à 1 le long de $\mathcal{C}_1$.
   (c) Montrer que la valeur de f le long de $\mathcal{C}_2$ est donnée par la fonction

$$g_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 - 2t^2 + 2t^4 \end{array}$$

(d) Dresser le tableau de variation de g_2.

(e) En déduire les valeurs extrèmes de f le long de la courbe $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

3. Donner les valeurs extrêmes de f sur le domaine $\mathcal{D}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Soient c une constante fixée strictement positive et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. Calculer les dérivées partielles des fonctions

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & g(y+cx) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \varphi_2 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & g(y-cx) \end{array}$$

en fonction de la dérivée de g.

2. Montrer que pour toutes fonctions g_1 et g_2, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, la fonction

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & g_1(y+cx)+g_2(y-cx) \end{array}$$

vérifie l'équation

$$(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables à valeurs réelles. Montrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{Rot}(\mathrm{Grad}(f))(X) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

2. Soit

$$\begin{array}{ccccc} F & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & X=(x,y,z) & \longmapsto & F(X)=(f_1(X),f_2(X),f_3(X)) \end{array}$$

un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{div}(\mathrm{Rot}(F))(X) = 0$$

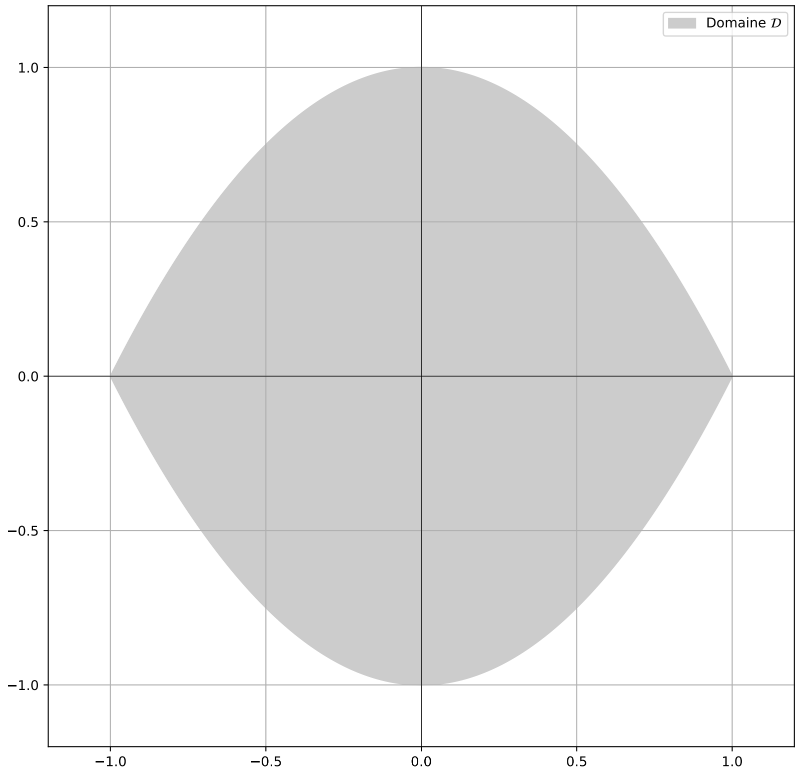
⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Fonctions de plusieurs variables - 2021/2022

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. (a)



(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy + 2x = 2x(1-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x^2$$

(c) Un point $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x(1-y) & = & 0 \\ 2y - x^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} 1-y & = & 0 \\ 2y - x^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1 \\ x^2 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1 \\ x & = & \sqrt{2} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1 \\ x & = & -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

La fonction f admet donc les points

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = (-\sqrt{2},1), \quad P_2 = (\sqrt{2},1)$$

On vérifie alors que

$$0 - 1 \leqslant 0 \leqslant 0 + 1 \ \Rightarrow \ P_0 \in \mathcal{D}$$

et

$$1 > 1 - (\sqrt{2})^2 \ \Rightarrow \ P_1 \notin \mathcal{D} \qquad \text{et} \qquad 1 > 1 - (-\sqrt{2})^2 \ \Rightarrow \ P_2 \notin \mathcal{D}$$

(d) Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(h,k) = k^2 - h^2k + h^2 = h^2 + k^2 + o(h^2+k^2) = \frac{1}{2}(2h^2 + 2k^2) + o(h^2+k^2)$$

(e) D'après le résultat obtenu ci-dessus, on a

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

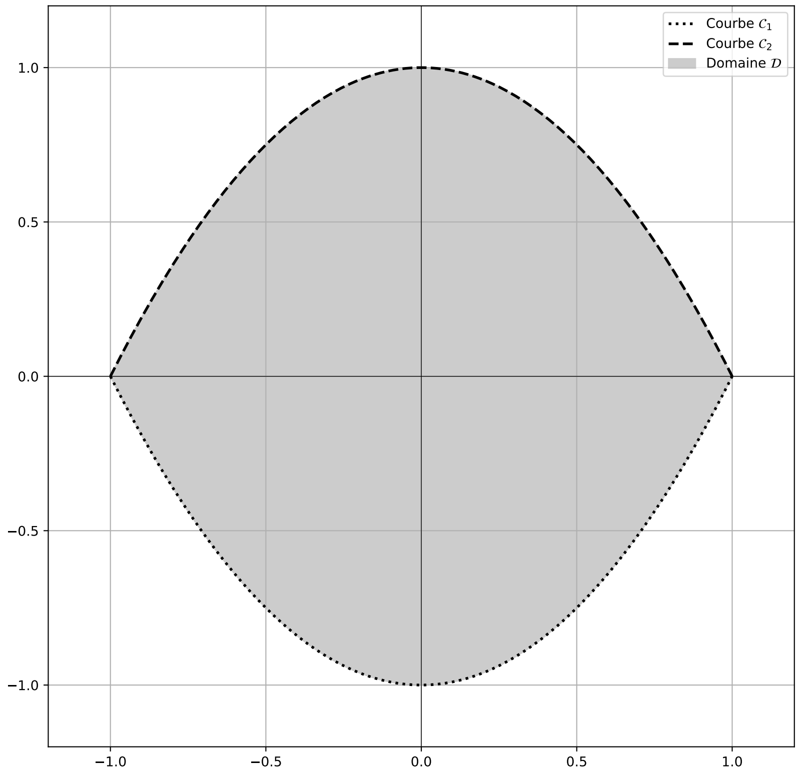
Cette matrice admet $2 > 0$ comme valeur propre double. Le point P_0 est donc un minimum.

2. *Au bord du domaine $\mathcal{D}$*

On note

$$\begin{array}{rcccc} X_1 & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (t, t^2-1) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccc} X_2 & : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (t, 1-t^2) \end{array}$$

(a)



(b) Le long de $\mathcal{C}_1$, la valeur de f est donnée par

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f \circ X_1(t) = f(t, t^2 - 1) \\ &= (t^2-1)^2 - t^2(t^2-1) + t^2 \\ &= \cancel{t^4} - \cancel{2t^2} + 1 - \cancel{t^4} + \cancel{t^2 + t^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) Le long de $\mathcal{C}_2$, la valeur de f est donnée par

$$\begin{aligned} g_2(t) &= f \circ X_2(t) = f(t, 1 - t^2) \\ &= (1-t^2)^2 - t^2(1-t^2) + t^2 \\ &= 1 - 2t^2 + t^4 - \cancel{t^2} + t^4 + \cancel{t^2} \\ &= 1 - 2t^2 + 2t^4 \end{aligned}$$

(d) La fonction g_2 est dérivable sur $[-1,1]$ et pour tout $t \in [-1,1]$, on a

$$g_2'(t) = -4t + 8t^3 = 4t(2t^2 - 1) = 4t(\sqrt{2}\,t - 1)(\sqrt{2}\,t + 1)$$

d'où

t	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
t		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{2}\,t+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\sqrt{2}\,t-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$g_2'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g_2	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

(e) Le maximum de la fonction f au dessus du bord de $\mathcal{D}$ est 1, atteint en

$$X_2(-1) = (-1,0), \qquad X_2(0) = (0,1) \qquad \text{et} \qquad X_2(1) = (1,0)$$

et en tous points de $\mathcal{C}_1$.

Son minimum est $\frac{1}{2}$ atteint en

$$X_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad X_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

3. Sur le domaine $\mathcal{D}$, la fonction f admet
   — 0 comme minimum, atteint en $P_0 = (0,0)$,
   — 1 comme maximum, atteint en $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. D'après les formules de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) = c\,g'(y+cx) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) = g'(y+cx)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) = -c\,g'(y-cx) \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) = g'(y-cx)$$

2. D'après les résultats obtenus ci-dessus, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = c\,g_1'(y+cx) - c\,g_2'(y-cx) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_1'(y+cx) + g_2'(y+cx)$$

et on en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = c^2 g_1''(y+cx) + c^2 g_2''(y+cx) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = g_1''(y+cx) + g_2''(y+cx)$$

et on vérifie rapidement que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = c^2 g_1''(y+cx) + c^2 g_2''(y+cx) - c^2\left(g_1''(y+cx) + g_2''(y+cx)\right) = 0$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 3 (Exercice ▲)

1. Par définition, pour tout $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Grad}(f)(X)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

donc les coordonnées $(r_1(X),r_2(X),r_3(X))$ du vecteur $\mathrm{Rot}(\mathrm{Grad}(f))(X)$ vérifient :

$$\begin{aligned} r_1(X)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(X)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(X)\\ &=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(X)-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(X)\\ &=0 \text{ d'après le théorème de Schwarz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2(X)&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(X)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(X)\\ &=0 \text{ d'après le théorème de Schwarz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3(X)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(X)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(X)\\ &=0 \text{ d'après le théorème de Schwarz}\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{Grad}(f))(X)=(0,0,0)=0_{\mathbb{R}^3}$$

2. Par définition, pour tout $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Rot}(F)(X)=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z),\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{Rot}(F))(X)&=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\right](X)+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\right](X)+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\right](X)\\ &=\cancel{\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y}(X)}-\cancel{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial z}(X)}+\cancel{\frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial z}(X)}-\cancel{\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x}(X)}+\cancel{\frac{\partial^2 f_2}{\partial z\partial x}(X)}-\cancel{\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial y}(X)}\\ &=0\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆