CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques, séries entières

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \frac{2^{2n}}{5^n + n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{2^{2n}}{3^n + n}.$$
Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
2. Déterminer, selon les valeurs de x et y, la nature de la série de terme général
$$w_n = \frac{x^{2n}}{y^n + n}.$$
On présentera les résultats sous la forme d'un découpage du plan muni d'un repère (xOy).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit
$$\begin{array}{rcccc} f & : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

1. Étudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.
2. Montrer que
$$\forall k \geqslant 2, \qquad \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$
(On pourra donner un argument analytique ou géométrique).
3. En déduire un encadrement de la somme partielle
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
4. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente et que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}.$$

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 Pour tout $n \in N$, on pose

$$a_n = n(-2)^n \qquad \text{et} \qquad b_n = (-2)^n.$$

1. Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence R à déterminer.
2. Donner une expression de

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad x \in]-R, R[$$

à l'aide des fonctions usuelles.

3. Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

(a) Écrire la somme $f(x) + g(x)$ sous la forme d'une série entière dont on précisera le rayon de convergence.

(b) Écrire sous forme de série entière la primitive de $(f + g)$ nulle en 0, notée h.

(c) Montrer que $h(x) = xg(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

(d) En déduire une expression de f sous forme de fraction rationnelle.

$\star\ \star$
$\star$

CORRECTION

Exercice 1 :

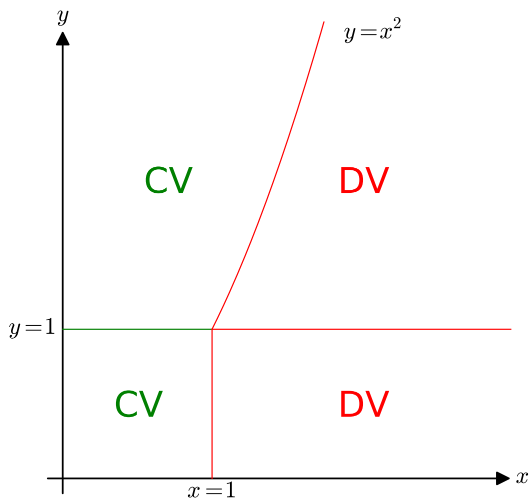
1. En factorisant les numérateurs et dénominateurs des termes u_n et v_n, on en obtient des équivalents : Ainsi,
   –
   $$u_n = \frac{2^{2n}}{5^n + n} = \frac{2^{2n}}{5^n}.\frac{1}{1+\frac{n}{5^n}} \sim \left(\frac{4}{5}\right)^n$$
   La suite (u_n) est donc équivalente à une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{5} < 1$. C'est donc le terme général d'une série convergente.
   –
   $$v_n = \frac{2^{2n}}{3^n + n} = \frac{2^{2n}}{3^n}\frac{1}{1+\frac{n}{3^n}} \sim \left(\frac{4}{3}\right)^n$$
   La suite (v_n) est donc équivalente à une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{3} > 1$. C'est donc le terme général d'une série divergente.
2. On se contentera ici d'étudier les cas $x, y \geqslant 0$.

   Un équivalent de $w_n = \frac{x^{2n}}{y^n+n}$ dépend en premier lieux des puissances respectives de y^n et n (les termes du dénominateur). On distingue donc les cas $y > 1$ et $y \leqslant 1$:

   – Si $y > 1$, on a $y^n + n \sim y^n$ et
   $$w_n \sim \left(\frac{x^2}{y}\right)^n$$
   On reconnaît ici le terme général d'une série géométrique de raison $q = \frac{x^2}{y}$. La série $\sum w_n$ converge donc si et seulement si cette raison est < 1, i.e. ssi $x^2 < y$.

   – Si $y \leqslant 1$, on a $y^n + n \sim n$ et
   $$w_n \sim \frac{(x^2)^n}{n}$$
   On distingue alors les sous cas $x < 1$, $x > 1$ et $x = 1$:
   – Si $x < 1$, on a
   $$\frac{w_n}{(x^2)^n} \sim \frac{1}{n} \to 0.$$
   w_n est donc dominé par $(x^2)^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Dans ce cas la série $\sum w_n$ converge également.
   – Si $x > 1$, par croissances comparées, on obtient $\lim w_n = +\infty$. La série $\sum w_n$ diverge donc grossièrement.
   – Si $x = 1$, on a $w_n \sim \frac{1}{n}$. On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$). La série $\sum w_n$ diverge donc.

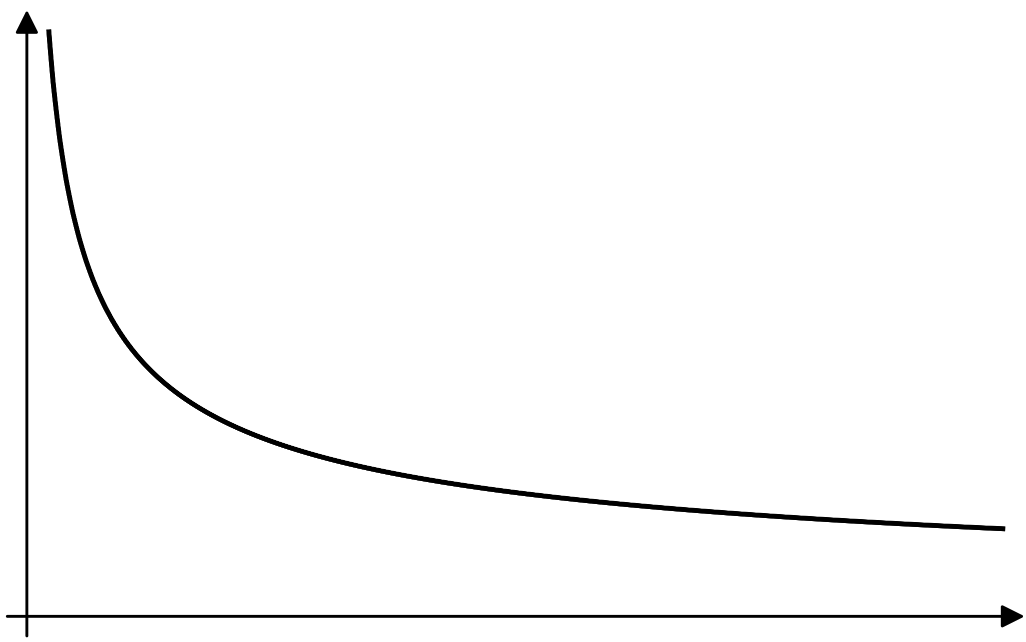
   Les différents cas sont résumés dans le graphe ci-dessous.



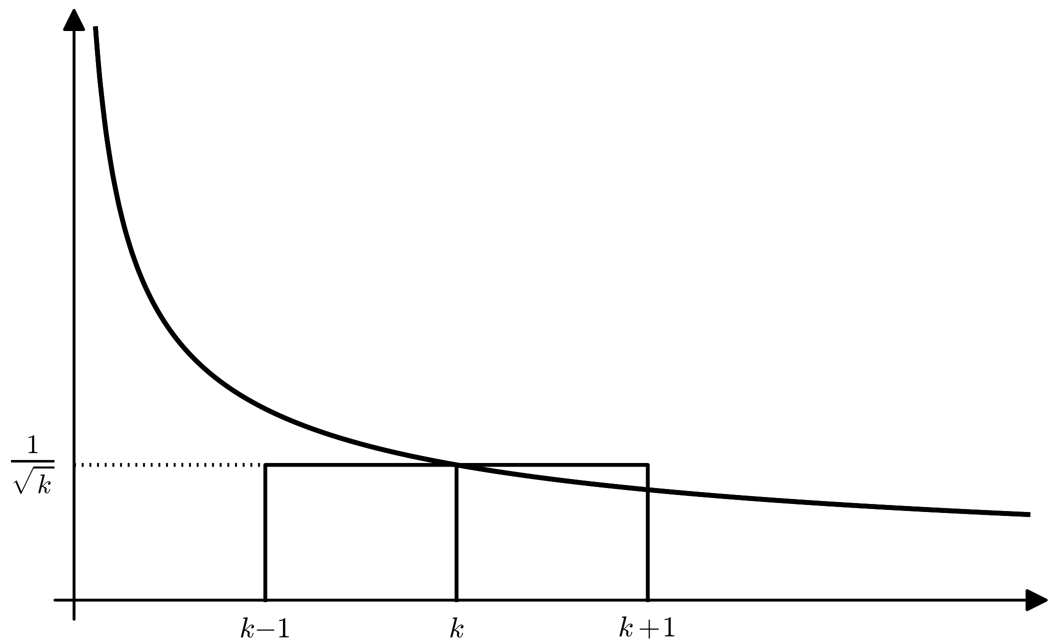
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} < 0$. La fonction f est strictement positive et strictement décroissante :



2. Géométriquement, la quantité $\frac{1}{\sqrt{k}}$ peut s'interpréter comme l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur $\frac{1}{\sqrt{k}}$. En plaçant ce rectangle entre sur l'intervalle $[k-1, k]$ puis $[k, k+1]$, on peut comparer son aire à l'aire sous la courbe de f :



On obtient ainsi les inégalités cherchées.

3. En sommant les inégalités obtenues, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Or En calculant les intégrales présentes dans ces inégalités, on fait apparaître des séries télescopiques :

–

$$\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_{k}^{k+1} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2})$$

–

$$\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_{k-1}^{k} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{k-1} = 2(\sqrt{n}-1)$$

D'où

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}) \leqslant S_n \leqslant 2(\sqrt{n}-1)$$

4. Le minorant $m = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2})$ obtenu à la question précédente tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$, ce qui donne les résultat attendu concernant la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$.
D'autre part, en divisant par $2\sqrt{n}$ l'inégalité obtenue à la question précédente, on a

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En factorisant par n dans l'expression $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$, on montre que les deux bornes ainsi obtenues tendent vers 1. D'après le théorème des gendarme, le quotient $\frac{S_n}{2\sqrt{n}}$ tend également vers 1, ce qui montre l'équivalence cherchée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Pour déterminer le rayon de convergence des deux séries entières étudiées, on peut appliquer le critère de d'Alembert. Ainsi :
   –
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(-2)^{n+1}}{n(-2)^n}\right| = 2\frac{n+1}{n} \;\to\; 2$$
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc $R_a = \frac{1}{2}$.
   –
   $$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n}\right| = 2 \;\to\; 2$$
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est donc $R_b = \frac{1}{2}$ également.
2. On reconnaît dans la série $\sum b_n x^n$ une série géométrique de raison $-2x$:
   $$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1+2x}$$
3. $$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-2)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-2)^n x^n$$
   On obtient une série entière de coefficients $c_n = (n+1)(-2)^n$. Là encore, le critère de d'Alembert nous permet de montrer que $R_c = \frac{1}{2}$.
4. La primitive de $(f+g)$ qui s'annule en 0 est par définition la fonction h vérifiant
   $$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f(t) + g(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-2)^n t^n\right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \int_0^x (n+1)t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \left[t^{n+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^{n+1} \end{aligned}$$
5. D'après le calcul précédent, on a $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^n \times x = x.g(x)$.
6. D'après les calculs précédents, on a
   $$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad h(x) = xg(x).$$

En dérivant cette expression, on obtient :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad f(x) + g(x) = g(x) + xg'(x).$$

D'où

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad f(x) = xg'(x) = x\left(\frac{-2}{(1+2x)^2}\right) = -\frac{2x}{(1+2x)^2}$$