CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques, séries entières

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \frac{x^n + y^n}{2^n}.$$

Déterminer en fonction de x et y la nature de la série $\sum u_n$.
On représentera les différents cas dans un repère (xOy) du plan.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^3}$$

et l'on note (S_n) la suite des sommes partielles associées à (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

1. Montrer par un argument géométrique ou analytique que

$$\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

2. En déduire un encadrement de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente. On note S la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

(b) En déduire un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que S_{n_0} donne une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On note $S(x)$ la série entière définie par

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de S est $R = 1$.
2. Quel est le comportement des séries $S(-1)$ et $S(1)$? Justifier.
3. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{n^2-1}$ en éléments simples.
4. En déduire une nouvelle écriture de $S(x)$ comme somme de deux séries entières S_1 et S_2.
5. Montrer que la série entière $S_1(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2(n-1)}$ vérifie

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S_1(x) = -\frac{1}{2} x \ln(1 - x).$$

(On pourra se baser sur le DSE de la fonction $\ln(1 - x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$).

6. Montrer que la série S_2 vérifie

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S_2(x) = \frac{1}{2x} \ln(1 - x) + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}.$$

7. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

⋆ ⋆
⋆

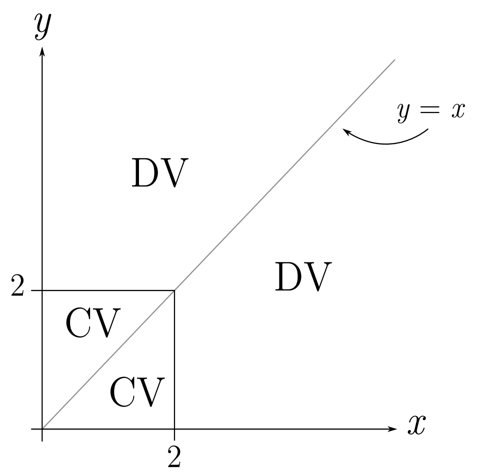
CORRECTION

Exercice 1 Pour déterminer la nature de la série $\sum u_n$, il faut comparer le comportement du numérateur à celui de 2^n. Or le terme le plus fort du numérateur est celui correspondant à la plus grande valeur entre x et y. Ainsi :

– Si $x > y$, on a
$$\frac{x^n + y^n}{x^n} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n \to 1$$
Donc $x^n + y^n \sim x^n$ et $u_n \sim \left(\frac{x}{2}\right)^n$ Dans ce cas, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $x < 2$.

– Si $x < y$, on a
$$\frac{x^n + y^n}{y^n} = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n \to 1$$
Donc $x^n + y^n \sim y^n$ et $u_n \sim \left(\frac{y}{2}\right)^n$ Dans ce cas, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $y < 2$.

D'où le découpage :



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. Soit $f \,:\, t \mapsto \frac{1}{t^3}$. La fonction f est positive et décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Pour tout t dans l'intervalle $[k, k+1]$, on a $f(t) \leqslant f(k)$. Ainsi,
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^3} dt.$$
En calculant chacune des intégrales, on obtient la borne inférieure cherchée.
En effectuant le même travail sur l'intervalle $[k-1, k]$, on a
$$\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[k-1,k]$ et en calculant les intégrales, on obtient la borne supérieure souhaitée.

2. On obtient un encadrement de S_n pour $n \in N^*$ en sommant les inégalités obtenues à la question précédente.

   ATTENTION : l'encadrement obtenu à la question précédente est valable pour $k \geqslant 2$. Il nous donne donc un encadrement pour la somme $\displaystyle\sum_{k=\mathbf{2}}^{n} u_k$:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}\right)$$

   Les sommes de gauche et de droite sont correspondent à des séries télescopiques. On peut donc les calculer explicitement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{1}{8}-\frac{1}{2(n+1)^2}\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

   Pour obtenir un encadrement de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, il faut ajouter à ces bornes le terme correspondant à $k=1$, soit $\frac{1}{1^3}$:

$$\frac{9}{8}-\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant S_n \leqslant \frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

3. On sait depuis le début de l'exercice que la série $\sum u_n$ converge car c'est une série de Riemann dont l'exposant $3>1$. On vient par ailleurs de le re-démontrer puisque l'encadrement précédent montre que la suite (S_n) qui est croissante est également majorée (par $\frac{3}{2}$, par exemple).

4. (a) De l'encadrement de u_k établi au début de l'exercice, on peut tirer un encadrement de R_n :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{k^2}\right)$$

   Il s'agit là encore de séries télescopiques qui se simplifient pour donner l'encadrement cherché.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste R_n donne la différence entre S et S_n. Pour que S_n soit une valeur approchée de S à 10^{-2} près, il suffit donc que $R_n < 10^{-2}$. D'après l'encadrement précédent, c'est le cas dès que $\frac{1}{2n^2} < 10^{-2}$.

Or pour que cette dernière inégalité soit vérifiée, il suffit que $n > \sqrt{50} = 7.07$. On peut donc prendre $n_0 = 8$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. Le rayon est donné par la limite $\dfrac{n^2-1}{(n+1)^2-1}$.

2. – En $R=1$, le terme général $\frac{1}{n^2-1}$ est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
   – En $R=-1$, on a affaire à une série alternée.

   La série entière est donc définie aux bords de l'intervalle de convergence.

3. Le dénominateur de la fraction rationnel se factorise sous la forme $n^2-1=(n-1)(n+1)$. La théorie assure donc qu'il existe des coefficients a et b tels que
$$\forall n \neq \pm 1, \quad \frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}.$$
   Les différentes méthodes permettant de déterminer les coefficients a et b donnent $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, d'où :
$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

4. D'après la décomposition précédente, on a
$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)} \right) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2(n-1)} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2(n+1)}\end{aligned}$$

5. Pour établir l'égalité demandée, on peut déterminer le DSE de la fonction $\left[x \mapsto -\frac{1}{2}x\ln(1-x)\right]$.

   Puisque $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, on a
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}x\ln(1-x) &= \frac{1}{2}x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2(n-1)} \qquad \text{en remplaçant } n \text{ par } n-1. \\ &= S_1(x)\end{aligned}$$

6. Pour établir l'égalité portant sur S_2, on peut là aussi calculer le DSE de la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{2x}\ln(1-x)\right]$, toujours à partir de celui de $\ln(1-x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x}\ln(1-x) &= -\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad\qquad = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2n} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2(n+1)} \qquad \text{en remplaçant } n \text{ par } n+1. \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2(n+1)} \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{x}{4}+S_2(x)
\end{aligned}$$

7. Des deux calculs précédents, on tire le DSE de $S(x)$:

$$\begin{aligned}
S(x) &= S_1(x)+S_2(x) \\
&= -\frac{1}{2}x\ln(1-x)+\frac{1}{2x}\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \\
&= \left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}x\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \\
&= \frac{1-x}{2x}\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}
\end{aligned}$$

On a alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} = S(1) = \lim_{x\to 1} S(x)$. En utilisant les croissances comparées, on montre que $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x)=0$ et $S(1)=\dfrac{3}{4}$.

⋆ ⋆
⋆