CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On considère les séries (S_n) et (T_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k}.$$

1. Montrer que les deux séries (S_n) et (T_n) sont convergentes (on pourra majorer les valeurs absolues de leurs termes généraux pour se ramener à une série géométrique convergente). On note S et T leurs sommes respectives :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{2^n} \qquad\qquad T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

2. On considère maintenant la série complexe (W_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \ = \ S_n \ + \ i.T_n.$$

   (a) Montrer que la série (W_n) converge et que sa somme W vérifie $W = S + i.T$.

   (b) Montrer que (W_n) est une série géométrique dont la raison q complexe vérifie $|q| < 1$ (on rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$).

   (c) Montrer que

$$W \ = \ \frac{2}{2 - e^i}.$$

   (d) En déduire les valeurs de S et T.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit S la série entière définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

1. Montrer que $S(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $S(x)$ est l'unique solution du problème différentiel

$$\begin{cases} y' - 3y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3. Résoudre ce problème différentiel et en déduire $S(x)$ sous forme explicite.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 1. Rappeler le développement en série entière de la fonction

$$u \longmapsto \frac{1}{1-u}$$

et préciser son rayon de convergence R.

2. En déduire le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ et préciser son rayon de convergence R.
3. Montrer que

$$\forall x \in [-R, R], \quad \ln(1+x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}.$$

On détaillera les arguments permettant d'inclure $-R$ et R dans le domaine de définition.

4. En déduire $\ln 2$ sous la forme d'une série alternée (S_n).
5. Pour quelle valeur de n la somme partielle S_n donne-t-elle une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près ?

$\star\ \star$
$\star$

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left|\frac{\cos(n)}{2^n}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
Les termes généraux des séries (S_n) et (T_n) sont donc majorées par le terme général d'une série géométrique convergente (car $\frac{1}{2} < 1$), donc elles convergent.

2. (a) Puisque $W_n = S_n + i.T_n$, en passant à la limite $n \to +\infty$ dans cette égalité, on obtient $W = S + i.T$.

   (b)
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\quad W_n &= S_n + i.Tn\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k)}{2^k} + i\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k)}{2^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k) + i\sin(k)}{2^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^i}{2}\right)^k\end{aligned}$$
   (W_n) est bien une série géométrique de raison $q = \frac{e^i}{2}$ et dont le module vaut $|q| = \frac{1}{2} < 1$.

   (c) La série (W_n) converge donc vers
$$W = \frac{1}{1 - \frac{e^i}{2}} = \frac{2}{2 - e^i}.$$

   (d) S et T sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de W. En multipliant le dénominateur $2 - e^i = 2 - \cos(1) - i\sin(1)$ par sa quantité conjuguée, on obtient W sous forme cartésienne et l'on trouve
$$S = \frac{4 - 2\cos(1)}{5 - 4\cos(1)} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{2\sin(1)}{5 - 4\cos(1)}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. On applique le critère de d'Alembert au terme général $u_n(x) = \frac{3^n|x|^n}{n!}$:
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{3^n|x|^n}\\ &= \frac{3|x|}{n+1}\\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$
Cette limite étant < 1 quelque soit x, la série $\sum u_n(x)$ est convergente quelque soit $x \in \mathbb{R}$. La somme $S(x)$ existe donc quelque soit $x \in \mathbb{R}$.

2. Comme toute série entière, la somme $S(x)$ est dérivable sur son intervalle de définition et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} n x^{n-1} \\ &= 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!} \\ &= 3S(x)\end{aligned}$$

De plus, puisque $S(x) = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \ldots$, on a

$$S(0) = 1 + 3.0 + \frac{9.0^2}{2} + \ldots = 1.$$

S est donc l'unique solution du problème différentiel proposé.

3. L'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{3x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. D'autre part, l'unique fonction de ce type vérifiant la condition $y(0) = 1$ est donnée par $\lambda = 1$.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = e^{3x}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. D'après la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

et la série ainsi obtenue a pour rayon de convergence $R = 1$.

2. En intégrant la formule précédente, on obtient le développement de $\ln(1-u)$ en série entière :

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \ln(1-u) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}.$$

puis celui de $\ln(1+u)$:

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \ln(1+u) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-u)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n}.$$

3. En posant $u = x^2$ dans la formule précédente, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n}. \qquad (*)$$

Pour inclure les valeurs ± 1 dans l'intervalle de convergence, il faut étudier la convergence des séries $\sum \frac{(-1)^{n+1}(\pm 1)^{2n}}{n} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On peut rapidement montrer qu'il s'agit à chaque fois d'une série alternée convergente. La somme définie plus haut reste donc valable en $x = \pm 1$.

4. En posant $x = 1$ dans l'égalité $(*)$, on obtient

$$\ln 2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

5. Il s'agit ici d'une série alternée. Son reste R_n est donc majoré par son terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |R_n| \leqslant \left| \frac{1}{n+1} \right|.$$

Or la somme partielle $S_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-2} près si le reste R_n est plus petit que 10^{-2}. Il suffit donc pour cela que $n + 1 > 100$, autrement dit $n \geqslant 100$.

⋆ ⋆
⋆