CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques, séries entières

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 (*La série géométrique*)

L'objectif de cet exercice est de déterminer les conditions d'existence et la valeur éventuelle de toute somme de la forme

$$G_{n_0}(q) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n$$

pour $q \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. *Le cas* $n_0 = 0$
   (a) Montrer par récurrence que si $q \neq 1$, alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
   (b) Déterminer les conditions d'existence ainsi que la valeur de la somme $G_0(q)$.

2. *Cas général*
   Soit n_0 un entier quelconque. Donner pour tout $q \in]-1,1[$ la valeur de la somme $G_{n_0}(q)$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 (*Une somme exacte*)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

1. Montrer que la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$
   (b) Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(S_n - \frac{n}{2^n}\right)$$
   (c) En déduire que S_n sous forme explicite.
   (d) Calculer S.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 (*Une somme approchée*)

L'objectif de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$

Pour cela, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Montrer à l'aide d'une récurrence sur $j \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+j+1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^j}$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{25}{24} u_{n+1}$$

   Ind. : on pourra commencer par effectuer le changement d'indice $k = n + j + 1$ dans l'expression du reste R_n.
4. À l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée de S à 10^{-3} près. On justifiera la valeur proposée.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4 (*La série exponentielle*)

L'objectif de cet exercice est de déterminer puis d'utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Pour cela, on note S la série entière définie par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de S.
2. Montrer que la fonction S est une solution du problème de Cauchy

$$(P) : \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3. En déduire la quantité $S(x)$ sous forme explicite.
4. À l'aide du résultat obtenu à la question précédente, déterminer les suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

⋆ ⋆

⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

<u>Init</u>. : pour $n = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

<u>Héréd</u>. : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-\cancel{q^{n+1}}+\cancel{q^{n+1}}+q^{n+2}}{1-q}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La somme $G_0(q)$ existe si et seulement si la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

existe. Or d'après les calculs précédents, cette limite existe si et seulement si la limite

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}$$

existe, i.e. si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

2. Soient $q \in]-1,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ fixés. On a

$$\begin{aligned}G_{n_0}(q) &= \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} q^{n_0+m} \quad \text{en posant } m = n - n_0 \\ &= q^{n_0} G_0(q) \\ &= \frac{q^{n_0}}{1-q}\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 :

1. Pour établir la convergence de la série $\sum \frac{n}{2^n}$ (qui est à termes positifs), on peut par exemple utiliser le critère de d'Alembert. Ainsi

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Cette limite étant strictement inférieure à 1, la série $\sum \frac{n}{2^n}$ converge.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1+1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

(b) On pose le changement de variable $j = k - 1$ dans la somme proposée. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^k} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{2^{j+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{2^j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} - \frac{n}{2^n} \right) \quad \text{car le premier terme de la somme précédente est nul} \\ &= \frac{1}{2} \left(S_n - \frac{n}{2^n} \right)\end{aligned}$$

(c) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \frac{1}{2} \left(S_n - \frac{n}{2^n} \right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{n}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow\ & S_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \\ \Leftrightarrow\ & S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}\end{aligned}$$

(d) En passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient $S = 2$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 :

1. Pour établir la convergence de la série $\sum u_n$ (qui est à termes positifs), on peut par exemple utiliser le critère de d'Alembert. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \times (2n-1)5^{2n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n+1} \times \frac{1}{25} \longrightarrow \frac{1}{25}\end{aligned}$$

Cette limite étant strictement inférieure à 1, la série $\sum u_n$ converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On note

$$\mathcal{P}(j) \; : \; u_{n+j+1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^j}$$

<u>Init</u>. : pour $n = 1$, le calcul effecuté à la question précédente montre que

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3} \times \frac{1}{25} \leqslant \frac{1}{25}$$

D'où

$$u_{n+1+1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{25^1}$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

<u>Héréd</u>. : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi : toujours d'après le calcul effecuté à la question 1, on a

$$\frac{u_{n+j+2}}{u_{n+j+1}} = \frac{2(n+j+1)-1}{2(n+j+1)+1} \times \frac{1}{25} \leqslant \frac{1}{25}$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, on a

$$u_{n+j+2} \leqslant \frac{1}{25} u_{n+j+1} \leqslant \frac{1}{25} \frac{u_{n+1}}{25^j} = \frac{u_{n+1}}{25^{j+1}}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 1$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En posant le changement de variable $k = n + j + 1$ dans la somme $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, on a

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} u_{n+j+1} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{25^j} \quad \text{d'après le résultat obtenu à la question précédente} \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{25^j} = u_{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^j = u_{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25}{24} u_{n+1}$$

4. La somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ est une valeur approchée de la somme S à 10^{-3} près dès que le reste R_n vérifie $R_n \leqslant 10^{-3}$. Or d'après les résultats obtenus à la question précédente, c'est le cas dès que

$$\frac{25}{24} u_{n+1} = \frac{25}{(2n+1)5^{2n+3}} = \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \leqslant 10^{-3}$$

Or

- Pour $n = 1$, on a $\dfrac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} = \dfrac{1}{3 \cdot 5^3} \approx 0.003$
- Pour $n = 2$, on a $\dfrac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} = \dfrac{1}{5 \cdot 5^5} \approx 0.7 \times 10^{-4} < 10^{-3}$

donc la somme

$$S_2 = \sum_{k=1}^{2} u_k = \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} \approx 0.2027$$

est une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4 :

1. Pour déterminer le rayon de convergence de la série S, on applique la règle de d'Alembert à la suite

$$\left(\left| \frac{x^n}{n!} \right| \right) = \left(\frac{|x|^n}{n!} \right)$$

Ainsi,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0$$

On constate ici que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, la limite ci-dessus est strictement inférieure à 1. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, le rayon de convergence de S est $R = +\infty$ et son domaine de définition est $D_S = \mathbb{R}$.

2. En tant que série entière définie sur $\mathbb{R}$, la série S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $S'(x)$ s'obtient en dérivant terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{en posant } k = n-1 \\ &= S(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction S est bien une solution de l'équation différentielle $y' = y$.

Par ailleurs,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \;\Rightarrow\; S(0) = 1$$

La fonction S vérifie les contraintes du problème de Cauchy proposé.

3. Comme tout problème de Cauchy, le problème (P) admet une unique solution. Par ailleurs, on sait (ou l'on retrouve) que la fonction $x \mapsto e^x$ est également une solution de (P).

Par unicité, on a donc $S = \exp$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

4. • D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n!} x^n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n!} = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- De même,

$$\begin{aligned} \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!}\, x^n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n!} = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

⋆ ⋆
⋆