CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Séries numériques, séries entières

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}, \quad u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$$

1. *Étude de la convergence*
   (a) Montrer que la suite (u_n) est de signe constant.
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

2. *Calcul de la somme*
   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

   $$u_n = v_{n+1} - v_n$$

   où

   $$v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

   (b) En déduire une forme explicite pour la somme partielle $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$
   (c) Déterminer la valeur de la somme $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

1. *Un résultat préliminaire*
   Soit M un entier fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \dfrac{1}{(M+1)^n}$
   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge et donner sa somme.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle et le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ vérifient respectivement

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(M+1)^k} = \frac{M+1}{M} - \frac{1}{M(M+1)^n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(M+1)^k} = \frac{1}{M(M+1)^n}$$

2. *Application*
   (a) Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

i. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. Montrer que pour tout $k \geqslant n+1$, on a

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{1}{(n+1)^k}$$

ii. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n.n!}$$

<u>Ind</u>. : on pourra s'appuyer sur les formules établies à la question 1b.

iii. Donner une valeur approchée de la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ à 10^{-2} près.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de déterminer par le calcul la forme explicite des séries entières

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

1. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition des séries entières $S(x)$ et $C(x)$.
2. Calculer $S(0)$ et $C(0)$ (on pourra s'appuyer sur la forme étendue des sommes $S(x)$ et $C(x)$).
3. Exprimer les dérivées $S'(x)$ et $C'(x)$ en fonction de $S(x)$ et $C(x)$.
4. Montrer que les fonctions S et C sont des solutions de l'équation différentielle

$$(E) \, : \, y'' + y = 0$$

5. On rappelle que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble

$$\Sigma = \left\{ y \, : \, x \longmapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Déterminer la forme explicite des séries entières $S(x)$ et $C(x)$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Séries numériques, séries entières - 2021/2022

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{2}{n(n+1)} > 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{2}{n(n+1)} < 1 \;\Rightarrow\; u_n < 0$$

donc la suite (u_n) est de signe constant.

(b) D'après le résultat obtenu ci-dessus, on peut appliquer un critère d'équivalence. Ainsi, puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 0$$

l'équivalent usuel

$$\ln(1-u) \underset{0}{\sim} -u$$

donne

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$$

Le terme $-\frac{2}{n^2}$ étant le terme général d'une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, la série associée converge et, par équivalence, la série $\sum u_n$ converge également.

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^2+n-2}{n(n+1)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \\
&= v_{n+1} - v_n
\end{aligned}$$

en posant

$$v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

(b) D'après le résultat obtenu ci-dessus, la série $\sum u_n$ est une série télescopique. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_2 = \ln\left(\frac{n+2}{n}\right) - \ln(3)$$

(c) La fonction ln étant continue en 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n} = 1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ln(1) = 0$$

donc en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln(3)$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. (a) Pour tout $M > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{1}{(M+1)^n} = \left(\frac{1}{M+1}\right)^n$$

donc la série $\sum u_n$ est une série géométrique de raison

$$0 < q = \frac{1}{M+1} < 1$$

Donc cette série converge et d'après les formules usuelles portant sur la somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(M+1)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{M+1}} = \frac{M+1}{M+1-1} = \frac{M+1}{M}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(M+1)^k} &= \frac{1-\frac{1}{(M+1)^{n+1}}}{1-\frac{1}{M+1}} = \frac{(M+1)^{n+1}-1}{(M+1)^{n+1}-(M+1)^n} \\ &= \frac{(M+1)^{n+1}-1}{(M+1)^n} \times \frac{1}{M+1-1} \\ &= \frac{(M+1)^{n+1}-1}{M(M+1)^n} = \frac{M+1}{M} - \frac{1}{M(M+1)^n}\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a par définition

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(M+1)^k} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(M+1)^n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(M+1)^k} \\ &= \cancel{\frac{M+1}{M}} - \left(\cancel{\frac{M+1}{M}} - \frac{1}{M(M+1)^n}\right) \\ &= \frac{1}{M(M+1)^n}\end{aligned}$$

2. (a) La série $\sum \frac{1}{n!}$ étant à termes strictement positifs, on peut appliquer le critère de d'Alembert.

Or, en posant $v_n = \frac{1}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

donc la série $\sum v_n$ converge.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. Pour tout $k \geqslant n+1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{n! \times \underbrace{(n+1) \times \ldots \times k}_{k-n \text{ termes } \geqslant\ n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{n!} \times \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{1}{(n+1)^k}\end{aligned}$$

ii. D'après le résultat obtenu ci-dessus et d'après le résultat préliminaire établi plus haut, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{1}{(n+1)^k} \\ &\leqslant \frac{(n+1)^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &\leqslant \frac{\cancel{(n+1)^n}}{n!} \times \frac{1}{n\cancel{(n+1)^n}} = \frac{1}{n.n!}\end{aligned}$$

iii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$R_n = S - S_n$$

donc S_n est une valeur approchée de S à 10^{-2} près si et seulement si $R_n \leqslant 10^{-2}$.

Or d'après la majoration établie à la question précédente, il suffit pour cela que

$$\frac{1}{n.n!} \leqslant 10^{-2}$$

Et puisque pour $n = 5$, on a

$$\frac{1}{5 \times 5!} = \frac{1}{5 \times 120} = \frac{1}{240} \leqslant 10^{-2}$$

la somme

$$S_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 2,717$$

est une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 3 (Exercice ▲)

1. — *Rayon de convergence de* $S(x)$: on pose ici

$$u_n(x) = \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Et l'on calcule

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} \\ &= \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le terme $u_n(x)$ est le terme général d'une série convergente. On en déduit

$$R_S = +\infty \qquad \text{et} \qquad D_S = \mathbb{R}$$

— *Rayon de convergence de* $C(x)$: on pose ici

$$v_n(x) = \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \right| = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Et l'on calcule

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} &= \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{x^{2n}} \\ &= \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le terme $v_n(x)$ est le terme général d'une série convergente. On en déduit

$$R_C = +\infty \qquad \text{et} \qquad D_C = \mathbb{R}$$

2. Sous forme étendue, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad S(0) = 0$$

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad C(0) = 1$$

3. Les séries entières étant dérivables terme à terme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = C(x)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} C'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2n)x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\ &\underset{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}x^{2m+1} = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} \\ &= -S(x) \end{aligned}$$

4. D'après les résultats obtenus ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S''(x) = C'(x) = -S(x)$$

et

$$C''(x) = -S'(x) = -C(x)$$

donc les deux fonctions S et C vérifient l'équation différentielle

$$y'' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y'' + y = 0$$

5. D'après les résultats obtenus à la question 4, les fonction S et C appartiennent à l'ensemble Σ.

Autrement dit, il existe un couple de constantes $(\lambda_S, \mu_S) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \lambda_S \cos(x) + \mu_S \sin(x)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$S'(x) = -\lambda_S \sin(x) + \mu_S \cos(x)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} S(0) = 0 \\ S'(0) = C(0) = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_S = 0 \\ \mu_S = 1 \end{array} \right.$$

La fonction S est donc

$$S : x \longmapsto 0.\cos(x) + 1.\sin(x) = \sin(x)$$

De même, il existe un couple de constantes $(\lambda_C, \mu_C) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C(x) = \lambda_C \cos(x) + \mu_C \sin(x)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$C'(x) = -\lambda_C \sin(x) + \mu_C \cos(x)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} C(0) = 1 \\ C'(0) = -S(0) = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_C = 1 \\ \mu_C = 0 \end{array} \right.$$

La fonction C est donc

$$C : x \longmapsto 1.\cos(x) + 0.\sin(x) = \cos(x)$$

⋆ ⋆
⋆