CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques, séries entières

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1 Soit (u_n) une suite numérique. Indiquer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausse. On donnera dans chaque cas une justification.

1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

   ☐ Vrai ☐ Faux

   Preuve/Contre-exemple : ....
   ....

2. Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

   ☐ Vrai ☐ Faux

   Preuve/Contre-exemple : ....
   ....

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

1. Déterminer, en fonction de a et b, la nature de la série $\sum u_n$.
   <u>Ind.</u> : on pourra déterminer, en fonction de a et b, un équivalent simple de $|u_n|$.

2. Déterminer, dans le(s) cas de converge, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n(a) = \frac{n}{a^n} \qquad \text{et} \qquad S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} u_k(a)$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum u_n(a)$ converge.

   On suppose maintenant que la série $\sum u_n(a)$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{a} S_n(a) = S_{n+1}(a) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a^k}$$

3. En déduire une expression de $S_n(a) - \frac{1}{a} S_n(a)$ explicitement en fonction de n.
4. Donner $S_n(a)$ sous forme explicite et en déduire la valeur de la somme $S(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soit (a_n) la suite numérique définie par

$$(a_n) \; : \; \begin{cases} a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \\ \forall n \geqslant 0, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$$

On note S la série entière définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leqslant 4^n$.
   (b) En déduire le rayon de convergence R de la série S.
2. Exprimer, pour tout $x \in]-R, R[$, les dérivées $S'(x)$ et $S''(x)$ en fonction des a_n.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction S.
4. En déduire un *problème de Cauchy* vérifié par la fonction S.
5. Résoudre le problème de Cauchy et en déduire S sous forme explicite.
6. En s'appuyant sur la forme explicite trouvée ci-dessus, déterminer la forme explicite de la suite (a_n).

⋆ ⋆
⋆

CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques, séries entières

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Nom : .... Prénom : ....

Exercice 1 Soit (u_n) une suite numérique. Indiquer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausse. On donnera dans chaque cas une justification.

1. Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

   ☐ Vrai ☐ Faux

   Preuve/Contre-exemple : ....
   ....

2. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

   ☐ Vrai ☐ Faux

   Preuve/Contre-exemple : ....
   ....

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$$

1. Déterminer, en fonction de a et b, la nature de la série $\sum u_n$.
   <u>Ind.</u> : on pourra déterminer, en fonction de a et b, un équivalent simple de $|u_n|$.

2. Déterminer, dans le(s) cas de converge, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n(a) = n.a^n \qquad \text{et} \qquad S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} u_k(a)$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la série $\sum u_n(a)$ converge.

   On suppose maintenant que la série $\sum u_n(a)$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$aS_n(a) = S_{n+1}(a) - \sum_{k=1}^{n+1} a^k$$
3. En déduire une expression de $S_n(a) - aS_n(a)$ explicitement en fonction de n.
4. Donner $S_n(a)$ sous forme explicite et en déduire la valeur de la somme $S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soit (a_n) la suite numérique définie par

$$(a_n) \ : \ \begin{cases} a_0 = -1, \quad a_1 = 4 \\ \forall n \geqslant 0, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

On note S la série entière définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $|a_n| \leqslant 2^n$.
   (b) En déduire le rayon de convergence R de la série S.
2. Exprimer, pour tout $x \in]-R, R[$, les dérivées $S'(x)$ et $S''(x)$ en fonction des a_n.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction S.
4. En déduire un *problème de Cauchy* vérifié par la fonction S.
5. Résoudre le problème de Cauchy et en déduire S sous forme explicite.
6. En s'appuyant sur la forme explicite trouvée ci-dessus, déterminer la forme explicite de la suite (a_n).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

   ■ Vrai ☐ Faux

   Preuve/~~Contre-exemple~~ : si la série $\sum u_n$ converge, son terme général u_n tend vers 0. Dans ce cas, $u_n^2 = o(u_n)$. Par domination, la série $\sum u_n^2$ converge également.

2. Si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

   ☐ Vrai ■ Faux

   ~~Preuve~~/Contre-exemple : en notant $u_n = \frac{1}{n}$, la série $\sum u_n^2$ converge alors que la série $\sum u_n$ ne converge pas.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Quelque soient a et b, le terme général u_n est de signe constant à partir d'un certain rang (au moins). Il est donc possible d'appliquer les critères de comparaison. Or

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$$

   Ainsi,

   - Si $a + b \neq 0$,
   $$u_n \sim \frac{(a+b)n}{n^2} = \frac{a+b}{n}$$
   On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$), donc par équivalence, la série $\sum u_n$ diverge.

   - Si $a + b = 0$, on a
   $$u_n = \frac{a}{n(n+1)} \sim \frac{a}{n^2}$$
   On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2$), donc par équivalence, la série $\sum u_n$ converge.

2. On suppose ici que $a + b = 0$. Donc $b = -a$ et

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}$$

   On reconnaît ici le terme général d'une série télescopique de la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ avec $v_n = -\frac{a}{n}$.

Ainsi, la somme partielle S_n vérifie

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = v_{n+1} - v_1 = -\frac{a}{n+1} + a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On peut ici appliquer le critère de d'Alembert :

$$\frac{|u_{n+1}(a)|}{|u_n(a)|} = \frac{n+1}{|a|^{n+1}}.\frac{|a|^n}{n} = \frac{n+1}{n}.\frac{1}{|a|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{|a|}$$

Ainsi, si $|a| > 1$, la série $\sum |u_n|$ converge et la série $\sum u_n$ converge également. Réciproquement, si $|a| \leqslant 1$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Pour la suite, on suppose donc que $|a| > 1$.

2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}.S_n &= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{a^k} &&= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{a^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k-1}{a^k} &&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{a^k}}_{S_{n+1}} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{a^k}\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a

$$S_n - \frac{1}{a}.S_n = S_n - S_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{a^k} = -\frac{n+1}{a^{n+1}} + \frac{1}{a}.\frac{1-\frac{1}{a^{n+1}}}{1-\frac{1}{a}}$$

4. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{a}\right)S_n = -\frac{n+1}{a^{n+1}} + \frac{1-\frac{1}{a^{n+1}}}{a-1} &\iff \frac{a-1}{a}.S_n = -\frac{n+1}{a^{n+1}} + \frac{1-\frac{1}{a^{n+1}}}{a-1} \\ &\iff S_n = \left(\frac{1-\frac{1}{a^{n+1}}}{a-1} - \frac{n+1}{a^{n+1}}\right).\frac{a}{a-1}\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$S(a) = \frac{a}{(a-1)^2}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4

1. (a) On raisonne ici par récurrence : on note $\mathcal{P}(n)\ :\ |a_n| \leqslant 4^n$.

   - D'après les valeurs initiales a_0 et a_1, les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
   - Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), on a

   $$|a_{n+2}| = |3a_{n+1} - 2a_n| \leqslant 3|a_{n+1}| + 2|a_n| \leqslant 3.4^{n+1} + 2.4^n = 14.4^n \leqslant 16.4^n = 4^{n+2}$$

   Donc la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire et vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$|\frac{a_n}{n!}x^n| \leqslant \frac{4^n}{n!}.|x^n| = \frac{(4x)^n}{n!}$$

   On reconnaît à droite le terme général du développement en série entière de e^{4x}. Ce DSE étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $R = +\infty$.

2. Puisque S est une série entière, on peut la dérivée “terme à terme”. Ainsi,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\frac{a_n}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1).\frac{a_n}{(n-1)!}x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-2)!}x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}}{n!}x^n$$

3. D'après la question précédente, et la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), on a

$$\begin{aligned} S''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3a_{n+1} - 2a_n}{n!}x^n \\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n \\ &= 3S'(x) - 2S(x) \end{aligned}$$

La fonction S est donc solution de l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

4. On a

$$S(0) = a_0 = 1 \quad \text{et} \quad S'(0) = a_1 = 3$$

La fonction S est donc la solution du problème de Cauchy

$$(P)\ :\ \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

5. L'équation différentielle du problème de Cauchy ci-dessus est linéaire, homogène, à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est

$$P(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions de la forme

$$y\,:\,x \longmapsto Ae^x + Be^{2x}$$

La fonction S cherchée est donc la fonction de ce type satisfaisant les conditions initiales. D'où :

$$\begin{array}{lcl} S(0) = 1 & \Rightarrow & A + B = 1 \\ S'(0) = 3 & \Rightarrow & A + 2B = 3 \end{array}$$

On en déduit le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ A + 2B = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} B = 2 \\ A = -1 \end{array} \right.$$

D'où

$$S\,:\,x \longmapsto 2e^{2x} - e^x$$

6. D'après le DSE de la fonction exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}-1}{n!}.x^n$$

Par unicité du DSE, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{2^{n+1}-1}{n!} \iff a_n = 2^{n+1} - 1$$

⋆ ⋆
⋆