CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques, séries entières

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{n!}, \qquad v_n = \frac{n+1}{n!}, \qquad w_n = \frac{n^2-2}{n!}$$

1. Donner sans calcul la nature de la série $\sum u_n$ et la valeur de sa somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

   <u>Ind.</u> : on pourra s'appuyer sur un résultat de cours.

2. Montrer que la série $\sum v_n$ converge et déterminer sa somme

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

   en fonction de U.

3. Montrer que la série $\sum w_n$ converge et déterminer sa somme

$$W = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

   en fonction de U et V puis en fonction de U.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. *Un résultat préliminaire*

(a) Compléter le résultat de cours ci-dessous :

$$\forall x \in \text{......}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \;=\; \text{.........}$$

(b) En déduire la forme explicite de la série entière

$$\ell(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On précisera les valeurs de x pour lesquelles cette égalité est valable.

2. On note S la série entière définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R puis le domaine de définition de S.

(b) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

(c) En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad S(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$

<u>Ind.</u> : on pourra s'appuyer sur le résultat obtenu à la question 1b.

(d) Déterminer la valeur de la somme

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient S et T les fonctions définies par

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \qquad \text{et} \qquad T(x) = xS(x)$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière S ainsi que son domaine de définition.
2. Montrer que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad T'(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$
3. En déduire $T(x)$ puis $S(x)$ sous forme explicite.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. On reconnaît ici la série entière exponentielle $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour $x = 1$. Cette série entière étant définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, la série $\sum u_n$ converge et sa somme vérifie

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^1 = e$$

2. On applique le critère de d'Alembert :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, cette limite étant strictement inférieure à 1, la série $\sum v_n$ converge.

Par ailleurs, on note que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n+1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \cancel{1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \cancel{1}\right) \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2e\end{aligned}$$

3. On applique là encore le critère de d'Alembert :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2 - 2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2-2} = \frac{n^2+2n-1}{(n+1)(n^2-2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, cette limite étant là encore strictement inférieure à 1, la série $\sum w_n$ converge.

Par ailleurs, on note que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n^2-2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} &= -2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}\right) \\ &= \cancel{-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} - 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \cancel{1}\right) \\ &= V - 2U = 0\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a)

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

   (b) On reconnaît dans le terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ une primitive de x^n. Ainsi, la fonction ℓ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. La fonction ℓ est donc de la forme

$$\ell(x) = -\ln(1-x) + k$$

En notant en outre que $\ell(0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et

$$\ell(x) = -\ln(1-x)$$

Par ailleurs, la série entière ℓ étant une primitive de la série entière $\sum x^n$, elle admet comme cette dernière $R = 1$ comme rayon de convergence. De plus, pour $x = 1$, le terme général $\frac{1}{n+1}$ est équivalent au terme général d'une série de Riemann divergente et pour $x = -1$, on reconnaît dans $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ le terme général d'une série alternée convergente. L'égalité ci-dessus est donc valable pour tout $x \in [-1,1[$.

2. (a) On applique ici le critère de d'Alembert à $u_n = \left|\dfrac{x^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{|x|^n}{n(n+1)}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \times \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{|x|^n}} \\ &= \frac{n}{n+2}.|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|\end{aligned}$$

On en déduit $R = 1$.

Par ailleurs, pour $x = \pm 1$, on a

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Par critère d'équivalence, la série $\sum \frac{(\pm 1)^n}{n(n+1)}$ converge et la fonction S est définie sur $[-1,1]$.

   (b) D'après le théorème de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}, \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

Or en multipliant cette égalité par n et en posant $n = 0$, on obtient

$$a = 1$$

et en multipliant cette même égalité par $n+1$ et en posant $n=-1$, on obtient

$$b=-1$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(c) En appliquant l'égalité ci-dessus à la série entière $S(x)$, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

et si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \ell(x) - \frac{1}{x}(\ell(x)-x) \\ &= 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x) \quad \text{d'après la question 1b} \end{aligned}$$

(d) D'après les calculs ci-dessus, on a

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = S(-1) = 1 - 2\ln(2)$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On pose

$$u_n(x) = \left|\frac{x^{2n}}{2n+1}\right| = \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

et on applique le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{x^{\cancel{2n}+2}}{2n+3} \times \frac{2n+1}{\cancel{x^{2n}}} \\ &= \frac{2n+1}{2n+3}x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2 \end{aligned}$$

On en déduit alors que $R=1$.

Par ailleurs, pour $x=\pm 1$, on a

$$u_n(\pm 1) = \frac{1}{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

On reconnaît à droite le terme général d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1$) et les séries $\sum u_n(\pm 1)$ divergente. La série entière S est donc définie sur l'intervalle $D_S =]-1,1[$.

2. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$T(x) = xS(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

D'où

$$T'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(2n+1)}x^{2n}}{\cancel{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n$$

On reconnaît ici la somme d'une série géométrique de raison x^2 et l'on obtient

$$T'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

On obtient le résultat souhaité en notant que

$$\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} . \frac{(1+\cancel{x}) + (1-\cancel{x})}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{\cancel{2}} . \frac{\cancel{2}}{1-x^2} = T'(x)$$

3. D'après le calcul précédent, on obtient $T(x)$ par un calcul de primitive :

$$\frac{1}{2(1-x)} \overset{\int}{\rightsquigarrow} -\frac{1}{2}\ln(1-x)$$
$$\frac{1}{2(1+x)} \overset{\int}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

D'où

$$T(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + k$$

En notant en outre que $T(0) = 0$, on obtient $k = 0$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad T(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Pour $x \neq 0$, on a alors

$$S(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Note : on retrouve l'identité $S(0) = 1$ en s'appuyant sur la continuité de la série entière S en 0 et en exploitant les développements limités de $\ln(1+u)$.

⋆ ⋆
⋆