CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 1. Soit $q \in \mathbb{R},\ q \neq 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

2. Déterminer la nature de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *Étude des suites vérifiant* $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2}$.

On note (u_n) un suite du type

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2}. \end{cases}$$

et on note f la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1 + x^2}{2} \end{array}$$

1. (a) Faire l'étude de f et tracer son graphe, ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans le repère n° 1 ci-joint.
   (b) Déterminer les points fixes de f et dresser le tableau de signes de $f(x) - x$.

2. (a) Tracer sur le graphe le parcours de (u_n) dans le cas où $u_0 = \frac{1}{2}$.
   (b) Tracer le parcours de (u_n) si $u_0 = 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite positive (c'est-à-dire $u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$).
4. Montrer que (u_n) est croissante.

5. Que dire de (u_n) si $u_0 = 1$?
6. On suppose dans cette question que $0 < u_0 < 1$.
   (a) Montrer que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente.
   (c) Quelle est la limite de (u_n) ? (Justifier).
7. On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.
   (a) Montrer que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Que peut-on dire de u_n quand $n \to +\infty$?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \prod_{k=2}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$$

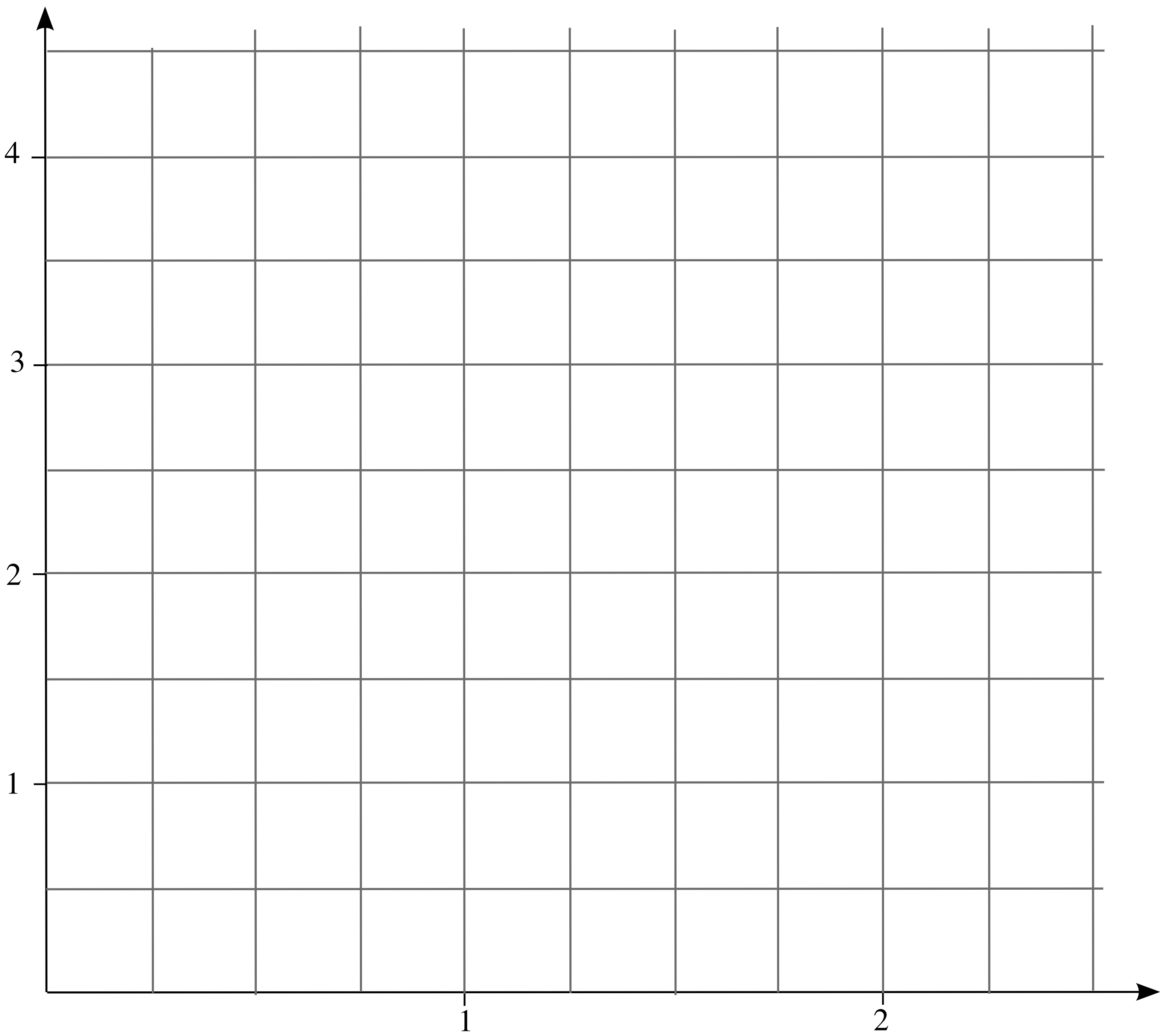
et

$$v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer $\dfrac{u_3}{u_2}$ et $\dfrac{u_4}{u_3}$.
3. Exprimer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.
4. Montrer que (u_n) est monotone.
5. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (On rappelle que $\cos a \sin a = \frac{1}{2}\sin(2a)$).
6. En déduire v_n puis u_n en fonctions de n.
7. En déduire la limite de la suite (u_n).

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



Repère 1

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Soit
$$\mathcal{P}(n)\ :\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

   – Initialisation : pour $n = 1$, on a :
$$\frac{1-q^{1+1}}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = 1+q = \sum_{k=0}^{1} q^k.$$
   Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   – Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.
\end{aligned}$$
   Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également.

   – Conclusion : par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

2. La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever cette indétermination, on peut mettre en facteur le terme "le plus fort" au numérateur et au dénominateur :
$$u_n = \frac{3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$
   Ainsi, puisque $\frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ et $u_n \to 1$.

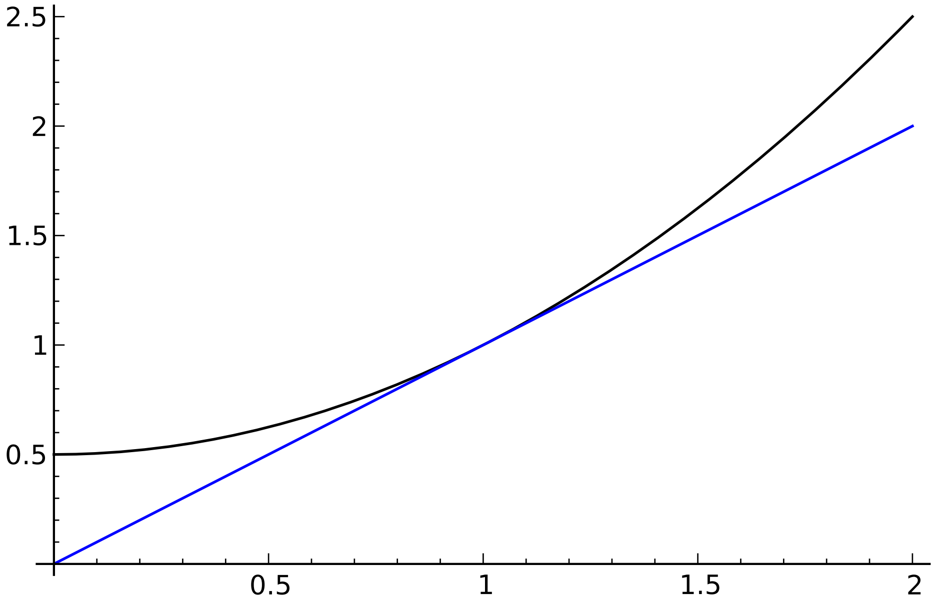
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. f est définie et dérivable sur son domaine $[0,+\infty[$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f'(x) = 2x.$$
   D'où :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   et



2.

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{1+x^2}{2}-x \\ &= \frac{1-2x+x^2}{2} \\ &= \frac{(1-x)^2}{2} \end{aligned}$$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$+$	

Ainsi, f admet $x^* = 1$ pour unique point fixe sur $\mathbb{R}^+$.

3.

4. D'après la relation de récurrence, u_n est un carré pour tout $n \geqslant 1$. u_n est donc positif pour tout $n \geqslant 1$. Puisque u_0 est donné > 0, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. D'après l'étude de la question 1b $f(x) - x$ est toujours positif sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $u_n \in \mathbb{R}^+$ pour tout n, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0.$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

6. Puisque 1 est un point fixe de f, si $u_0 = 1$, alors (u_n) est constante égale à 1.

7. (a) On a montré plus haut que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, si $u_0 < 1$, on a

$$u_1 = f(u_0) < f(1) = 1.$$

Par récurrence (à écrire proprement), on en déduit que $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Puis (u_n) est croissante et majorée (par 1), elle converge.

(c) Puisque (u_n) converge, sa limite est l'unique point fixe de f. Donc $u_n \to 1$.

8. (a) D'après la question 4, la suite (u_n) est croissante. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0 > 1.$$

(b) On montre par l'absurde que (u_n) ne peut converger. En effet, si elle converge, elle doit converger vers un point fixe de f. Or elle s'éloigne de l'unique point fixe $x^* = 1$ de f. Elle ne peut donc converger. Puisqu'elle est croissante, on en déduit qu'elle tend vers $+\infty$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.

$$u_2 = \prod_{k=2}^{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u_3 = \prod_{k=2}^{3} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$u_4 = \prod_{k=2}^{4} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

2.

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{u_4}{u_3} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$$

3.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{\prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

4. D'après l'étude précédente, puisque $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in]0, 1[$ pour tout $n \geqslant 2$, on a $< 0\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. La suite (u_n) est donc décroissante.

5.

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Le quotient étant constant, la suite (v_n) est géométrique et sa raison est $q = \frac{1}{2}$. D'autre part, son premier terme est

$$v_2 = u_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

6. D'après ce qui précède, on a

$$\forall n \geqslant 2, \quad v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{v_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

7. On a $\frac{\pi}{2^n} \to 0$. On peut donc exploiter le D.L. de sinus en 0 : $\sin(u) = u + o(u)$. Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}\left(\frac{\pi}{2^n} + o\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{\pi}{2}\right)} \to \frac{2}{\pi}.$$