CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 1. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = e^{-2n}$$

(a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) En déduire le comportement de (u_n) (variations, nature et limite éventuelle).

2. Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = \frac{e^{(n-1)^2} + e^{-2n}}{e^{n^2+1} - 1}$$

(a) Montrer que v_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que

$$v_n \underset{\infty}{\sim} u_n$$

(c) En déduire la nature de (v_n) et donner sa limite.

(d) Décrire la vitesse de convergence de (v_n).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *Étude des suites vérifiant* $u_{n+1} = u_n - \sin(u_n)$.

On note (u_n) un suite du type

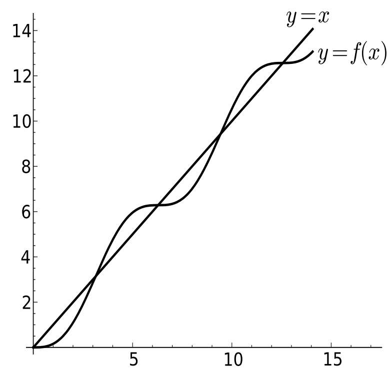
$$(u_n) : \begin{cases} u_0 > 0, \\ u_{n+1} = u_n - \sin(u_n). \end{cases}$$

et on note f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \sin x \end{array}$$

Dans le repère 1 ci-joint, on a tracé la courbe de f ainsi que la première bissectrice du repère.

1. *Étude graphique.*
   (a) Tracer dans le repère 1 le trajet de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = \frac{2\pi}{3}$.
   (b) Quel semble être le comportement de cette suite ?
2. *Étude analytique.*
   (a) Montrer que 0 et π sont des points fixes de f.
   (b) Déterminer leurs natures.
   (c) Justifier le comportement observé dans la question 1b.
   (d) Déterminer l'ensemble des points fixes de f (on pourra s'appuyer sur le graphe ci-contre).
   (e) Déterminer la nature de chacun de ces points fixes.
   (f) En déduire le comportement d'une suite (u_n) en fonction de sont point de départ u_0.



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

   où A et B sont des constantes (complexes) à déterminer.
3. Montrer à l'aide des formules d'Euler que

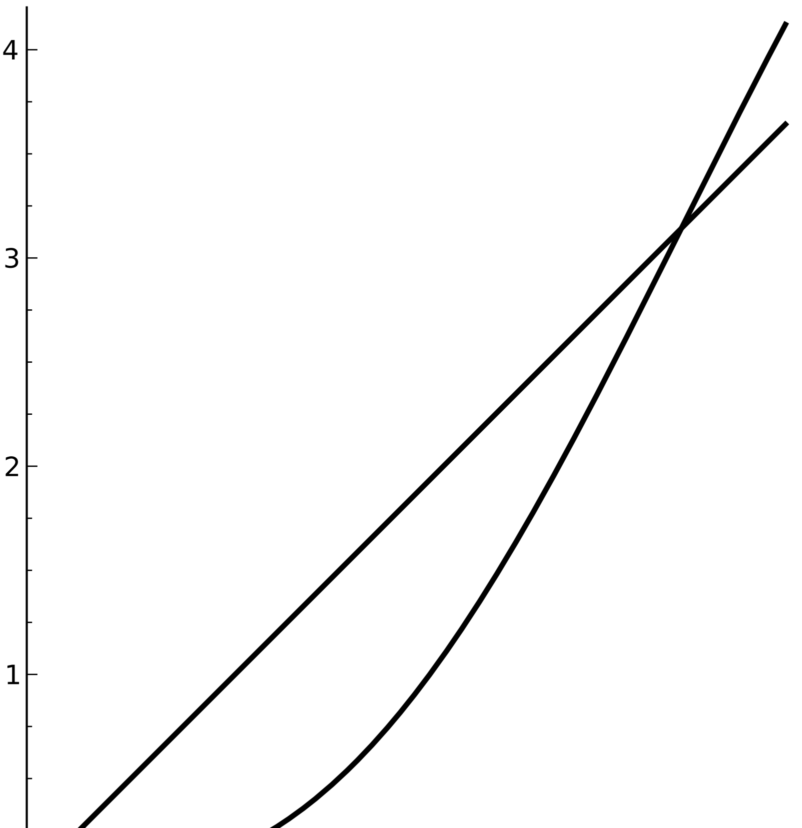
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

   (on pourra commencer par déterminer la forme exponentielle des racines $\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$).
4. Décrire le comportement de u_n quand $n \to +\infty$.

⋆ ⋆
⋆

Nom : ....

Prénom : ....



Repère 1

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-2(n+1)}}{e^{-2n}}$$
$$= e^{-2}$$

Puisque le quotient ci dessus est constant, la suite associée est géométrique. La constante obtenue est la raison $q = e^{-2}$. Le premier terme est ici $u_0 = e^0 = 1$.

(b) (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = e^{-2} \in [0, 1[$. Elle est donc décroissante et converge vers 0.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2+1 \geqslant 1$. Donc $e^{n^2+1} \geqslant e > 1$. Le dénominateur de v_n ne s'annule donc jamais.

(b)

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{e^{-2n}}.\frac{e^{(n-1)^2} + e^{-2n}}{e^{n^2+1} - 1}$$
$$= \frac{e^{(n-1)^2+2n} + 1}{e^{n^2+1} - 1}$$
$$= \frac{e^{n^2+1} + 1}{e^{n^2+1} - 1}$$

En mettant en facteur le terme le plus fort (e^{n^2+1}) au numérateur et au dénominateur, on obtient 1 pour limite du quotient $\frac{v_n}{u_n}$. Par définition, les deux suites sont donc équivalentes.

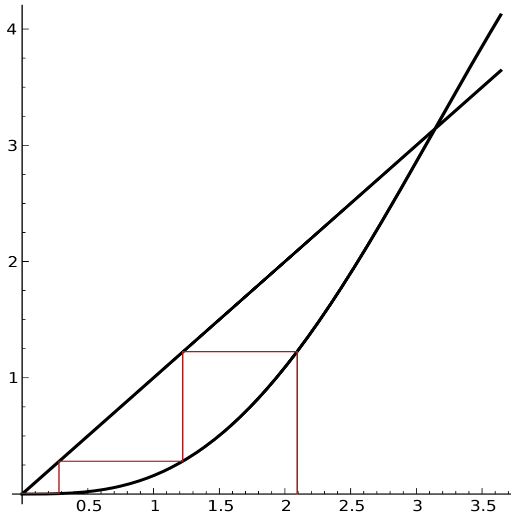
(c) La suite (v_n) a la même nature que (u_n) et la même limite. Donc (v_n) converge vers 0.

(d) La vitesse de convergence de (v_n) est la même que pour (u_n). Il s'agit donc ici d'une convergence géométrique (donc rapide).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a)



(b) La suite (u_n) semble converger vers 0.

2. (a) On a

$$\begin{array}{rcccl} f(0) & = & 0-\sin(0) & = & 0 \\ f(\pi) & = & \pi-\sin(\pi) & = & \pi \end{array}$$

Donc 0 et π sont des points fixes de f.

(b) $f'(x) = 1-\cos(x)$. Donc

$$\begin{array}{rcl} f'(0) & = & 0 \\ f'(\pi) & = & 2 \end{array}$$

Donc 0 est stable et π est instable.

(c) La question 1b porte sur une suite associée à f dont le premier terme u_0 est dans l'intervalle $[0,\pi]$. Puisque f est croissante sur cet intervalle, il est stable pour f. La suite (u_n) est donc monotone. De plus, puisque $f(x) < x$ sur $[0,\pi]$, la suite (u_n) est décroissante.

Étant décroissante et minorée (par 0), elle converge. Puisque f est continue, (u_n) converge vers le point fixe de f duquel elle se rapproche, à savoir 0.

(d) Les points fixes de f sont les solutions de $f(x) = x \Leftrightarrow \sin(x) = 0$. Il s'agit donc des points x_k définis par $x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(e) Soit $x_k = k\pi$ un point fixe quelconque de f. On a

$$f'(x_k) = 1-\cos(k\pi) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc x_k est stable si k est pair et instable sinon.

(f) Soit (u_n) une suite associée à f, de point de départ u_0. Si $u_0 = k\pi$ pour un entier k, alors la suite est constante. Sinon, il existe un unique entier k tel que

$$k\pi < u_0 < (k+1)\pi.$$

Si k est pair, alors (u_n) converge vers $k\pi$. Sinon, (u_n) converge vers $(k+1)\pi$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.
$$u_2 = u_1 - u0 = \sqrt{3}, \qquad u_3 = u_2 - u_1 = 0, \qquad u_4 = u_3 - u_2 = -\sqrt{3}.$$

2. (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est
$$P(X) = X^2 - X + 1$$
dont les racines sont $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

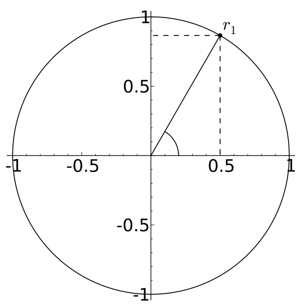
   Il existe donc $A, B \in \mathbb{C}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

   En appliquant cette formule à $n = 0$ puis $n = 1$, on obtient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{lcl} A + B & = & 0 \\ A\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) & = & \sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \frac{1}{i} \\ B & = & -\frac{1}{i} \end{array}\right.$$

   Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{i}\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]$$

3. En calculant le module et l'argument des racines r_1 et r_2, on obtient leur écriture exponentielle :
$$r_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad r_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

   On peut également utiliser un argument géométrique :



   D'où
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \frac{1}{i}\left(e^{i\frac{n\pi}{3}} - e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) \\ &= 2.\frac{e^{i\frac{n\pi}{3}} - e^{-i\frac{n\pi}{3}}}{2i} \\ &= 2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \qquad \text{(Formule d'Euler pour le sinus)} \end{aligned}$$

4. La suite est donc oscillante. Elle alterne entre les valeurs 0, $\sqrt{3}$, 0 et $-\sqrt{3}$.