CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient (e_n) et (ε_n) les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n = e_n + \frac{1}{n.n!}.$$

(on rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et que $0! = 1$).

1. (a) Écrire e_0, e_1, e_2 et e_3 sous forme étendue.
   (b) Calculer $e_1 - e_0$, $e_2 - e_1$ et $e_3 - e_2$.
   (c) Montrer que, de façon générale
   $$e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!}$$
   et en déduire le sens de variation de la suite (e_n).
2. Montrer que la suite (ε_n) est décroissante.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n - e_n = 0$.
4. Montrer que les suites (e_n) et (ε_n) convergent et ont la même limite. On admettra que cette limite commune est e.
5. Compléter l'algorithme Sage ci-dessous afin que la fonction `e_approx(n)` renvoie une approximation de e à 10^{-n} près.

```
def e_approx(n):
    e = 1
    k = 1
    while 1/(k*factorial(k)) ....... :
        e = .....
        k = .....
    return .....
```

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. Soit (u_n) une suite vérifiant

$$(u_n) \ : \ \begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

avec

$$f \ : \ x \longmapsto \frac{3x+1}{2x+1}$$

(a) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(c) Montrer que f admet $x^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ pour seul point fixe dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de signe de $f(x) - x$ sur cet intervalle.

(d) Sur le graphe ci-joint,

i. placer le point fixe de f,

ii. dessiner le parcours de (u_n) dans le cas où $u_0 = 0.5$,

iii. dessiner le parcours de (u_n) dans le cas où $u_0 = 2$.

(e) On suppose ici que $u_0 \in \left]0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left]0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$.

ii. Montrer que (u_n) est croissante.

iii. En déduire la nature de (u_n) et la valeur de sa limite.

(f) On suppose maintenant que $u_0 > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

ii. Montrer que (u_n) est décroissante.

iii. En déduire la nature de (u_n) et la valeur de sa limite.

(g) Que dire de (u_n) si $u_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$?

2. Soit (v_n) la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

où

$$g \ : \ x \longmapsto 1 + \frac{1}{2x}.$$

(a) Montrer que $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g \circ g(x) = f(x)$.

(c) Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = v_{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = v_{2n+1}$$

sont associées à la fonction f.

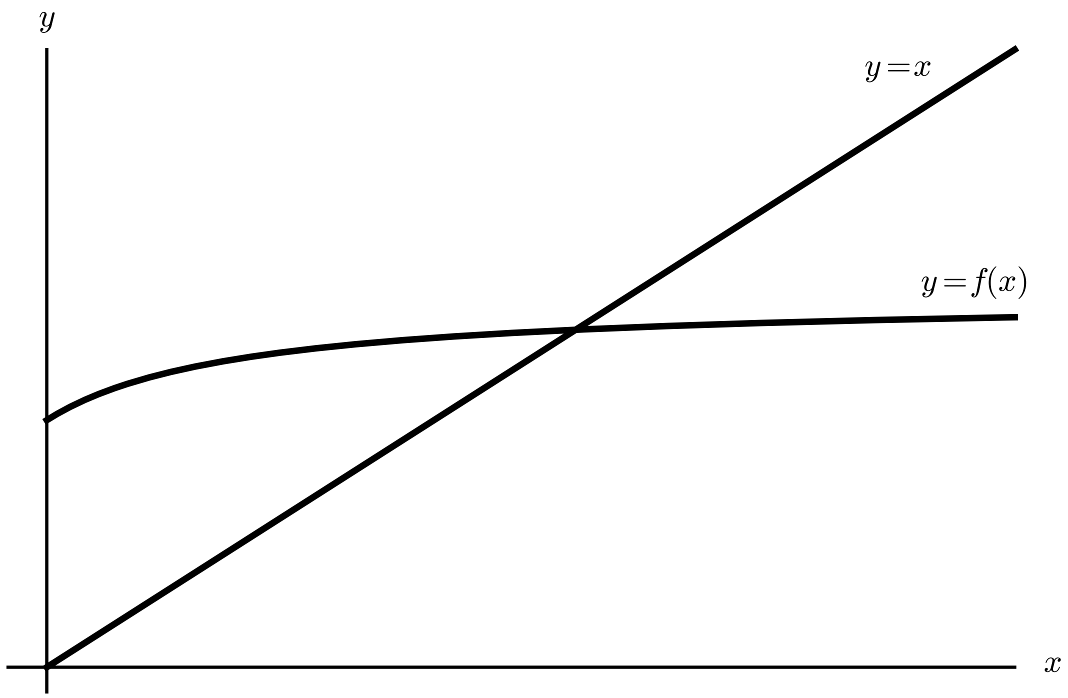
(d) Montrer que (a_n) converge et donner sa limite.

(e) Calculer b_0 et en déduire le comportement de la suite (b_n).

(f) En déduire le comportement et la limite de (v_n).

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a)

$$\begin{aligned}
e_0 &= \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} &&= \frac{1}{0!} \\
e_1 &= \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} &&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \\
e_2 &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} &&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \\
e_3 &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} &&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
e_1 - e_0 &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{0!} &&= \frac{1}{1!} \\
e_2 - e_1 &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) &&= \frac{1}{2!} \\
e_3 - e_2 &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) &&= \frac{1}{3!}
\end{aligned}$$

(c) De façon générale :

$$\begin{aligned}
e_{n+1} - e_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Puisque cette différence est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (e_n) est croissante.

2. Le sens de variation de la suite (ε_n) est donné par le signe de $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$. Or

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n &= e_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - e_n - \frac{1}{n.n!} \\
&= e_{n+1} - e_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)(n+1)!} \\
&= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0
\end{aligned}$$

Donc (ε_n) est décroissante.

3. $\varepsilon_n - e_n = \dfrac{1}{n.n!} \longrightarrow 0$.
4. D'après les trois questions précédente, les suites (e_n) et (ε_n) sont adjacentes. Elles sont donc toutes deux convergentes et ont la même limite.
5.

```
def e_approx(n):
    e = 1
    k = 1
    while 1/(k*factorial(k)) > 10**(-n) :
        e = e + 1/factorial(k)
        k = k + 1
    return e
```

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a) Soit $\mathcal{P}(n)\ :\ u_n > 0$.
   - Initialisation : par hypothèse $u_0 > 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $3u_n + 1 > 0$ et $2u_n + 1 > 0$ et
   $$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n+1}{2u_n+1} > 0$$
   comme quotient de deux termes strictement positifs.
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
   $$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{3(2x+1)-2(3x+1)}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$$
   Donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

(c) Pour déterminer les points fixes de f, on résout l'équation $f(x) - x = 0$:

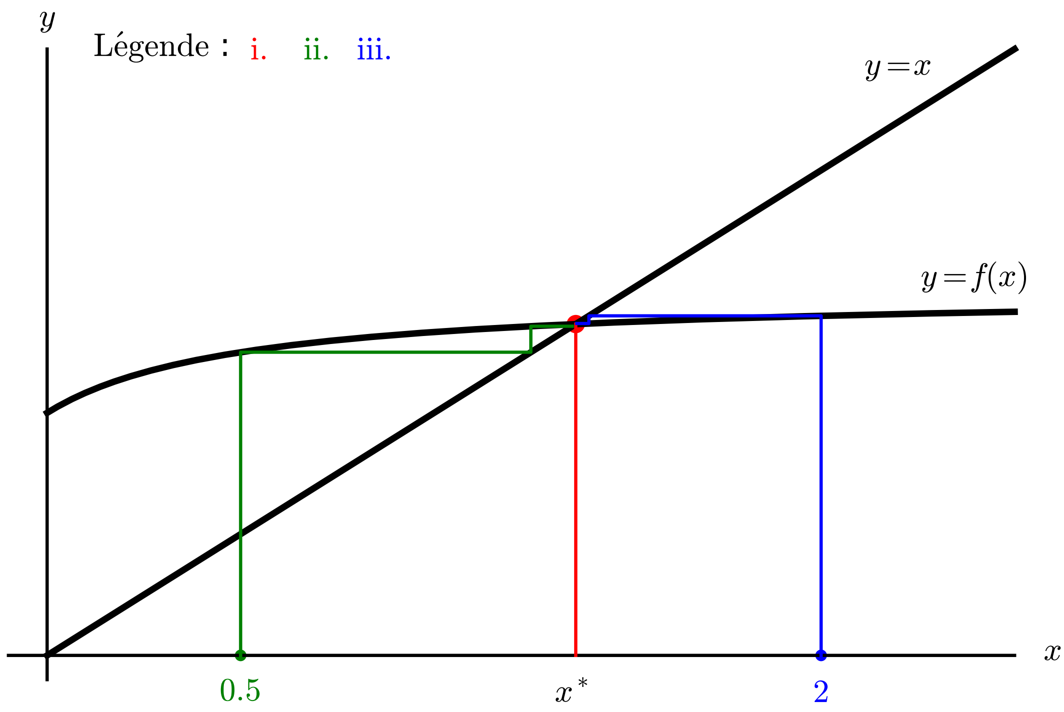
$$\begin{aligned} f(x) - x = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x+1} - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x+1-x(2x+1)}{2x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x^2+2x+1}{2x+1} = 0 \end{aligned}$$

Les points fixes de f sont donc les racines du polynôme $-2x^2 + 2x + 1$. Un calcul de discriminant donne deux racines $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ dont une seule est positive : $x^* = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

D'autre part, un polynôme étant du signe de son coefficient dominant à l'extérieur des racines, on en déduit le signe de $f(x) - x$:

$$f(x) - x \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ < 0 & \text{si} \quad x > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(d)



(e) i. D'après la question 1a, $u_n > 0$ pour tout n. Il suffit donc de montrer que si $u_0 < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, alors $u_n < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ pour tout n. Or, là encore, la démonstration se fait par récurrence en appliquant la fonction f (croissante) à l'inégalité $u_n < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et en exploitant le fait que $x^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ est un point fixe de f.

ii. D'après l'étude du signe de $f(x) - x$, on sait que $f(x) - x > 0$ sur $\left]0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0.$$

Donc (u_n) est croissante.

iii. Étant croissante et majorée (par x^*), la suite (u_n) converge. Puisque f est continue, (u_n) converge nécessairement vers un point fixe de f. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

(f) i. Comme pour les questions précédentes, on répond à cette question par un raisonnement par récurrence en exploitant le fait que f est croissante et que $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ est un point fixe de f.

ii. Puisque $f(x) - x < 0$ sur $\left]\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est négative pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) décroit.

iii. (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge. Sa limite est un point fixe de f, donc là encore $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

(g) Puisque $x^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ est un point fixe de f, on montre aisément par récurrence que si $u_0 = x^*$, la suite (u_n) est constante égale à x^*.

2. (a) Par récurrence en exploitant le fait que si $v_n > 0$, alors $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2v_n} > 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \quad g \circ g(x) = g(g(x)) &= g\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \\
= 1 + \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2x}\right)} &= 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{x}} \\
= 1 + \frac{x}{2x+1} &= \frac{2x+1+x}{2x+1} \\
= \frac{3x+1}{2x+1} &= f(x)
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = v_{2(n+1)} = v_{2n+2} = g(v_{2n+1}) = g(g(v_{2n})) = f(a_n).$$

(a_n) est donc bien associée à la fonction f.
De même,

$$b_{n+1} = v_{2(n+1)+1} = v_{2n+3} = g(v_{2n+2}) = g(g(v_{2n+1})) = f(b_n).$$

(d) D'après la question 1, le comportement de (a_n) dépend de la position de $a_0 = v_0 = 3$ par rapport à x^*. Puisque $3 > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, on se réfère au traitement de la question 1f pour conclure que $a_n \to \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

(e) Comme à la question précédente, le comportement de la suite (b_n) dépend de la valeur de b_0. Or $b_0 = v_1 = g(3) = \frac{7}{6} < x^*$. Donc (b_n) converge vers x^*.

(f) Les deux suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergent toutes deux vers x^*. Puisqu'à elles deux elles recouvrent l'ensemble des termes de la suite (v_n), on en conclue que (v_n) converge également vers x^*.

⋆ ⋆
⋆