CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient (S_n) et (T_n) les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

1. Montrer que les suites (S_n) et (T_n) convergent vers une même limite ℓ.
2. Déterminer un intervalle de longueur 10^{-2} contenant ℓ et une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$$

En étudiant les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) diverge.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (R_1) \,:\, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}, \qquad (R_2) \,:\, v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$

1. Calculer les termes u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes.
4. En déduire la nature des suites (u_n) et (v_n) et le signe des limites.
5. On note $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.

(a) Montrer que $\ell.\ell' = 0$ (on pourra passer à la limite "$n \to +\infty$" la relation (R_1)).

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = 1$.

(c) En déduire les valeurs respectives de ℓ et ℓ'.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

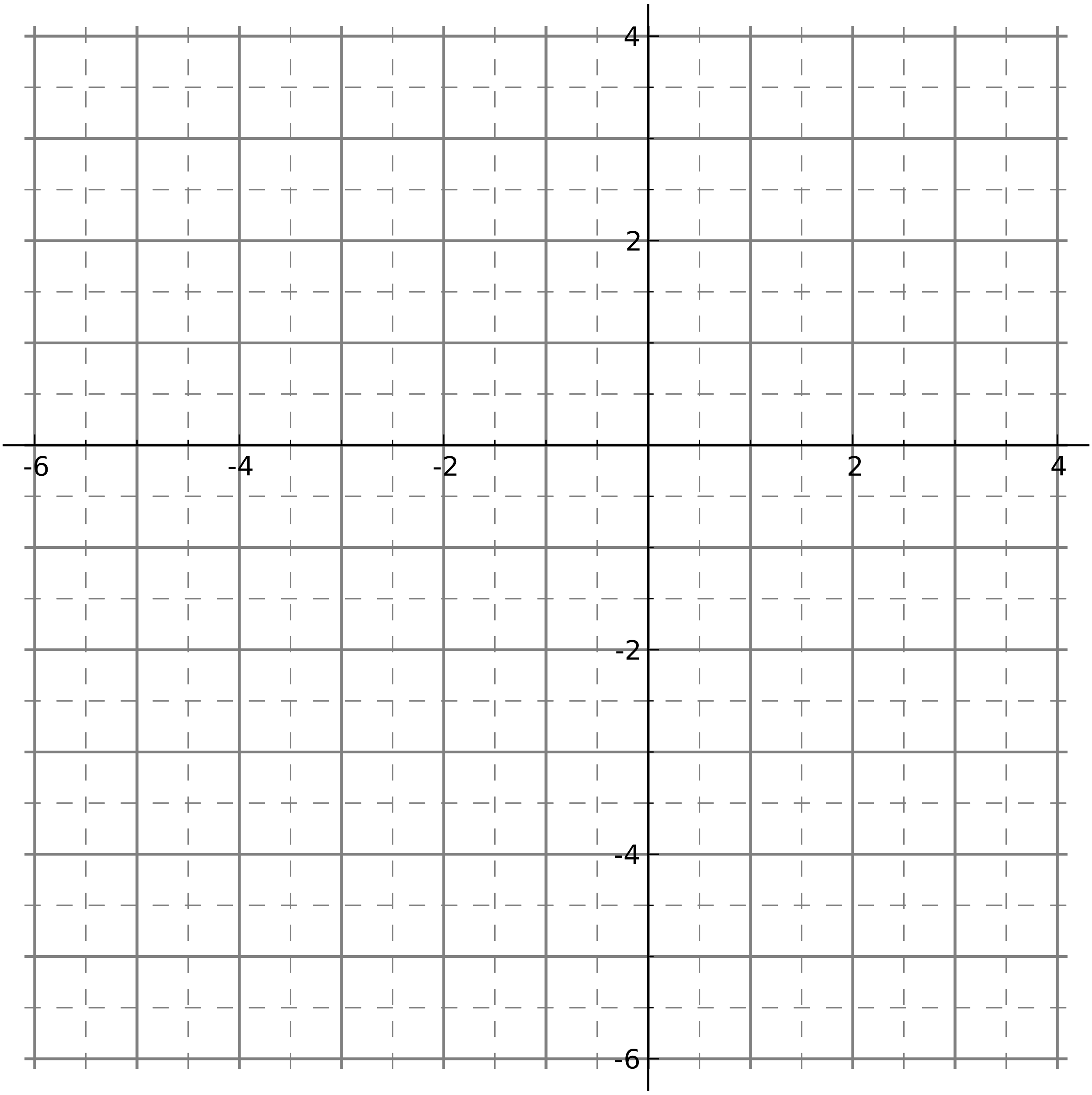
Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-4) & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 3(x+1) & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ \frac{2}{3}(x+1) & \text{si} \quad x \geqslant -1 \end{cases}$$

1. Montrer sans calcul que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Dans le repère ci-joint, tracer la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
3. Déterminer graphiquement puis par le calcul les points fixes de f.
4. À partir du graphique, dresser le tableau de signe de $f(x) - x$ et donner les intervalles stables de f.
5. Donner, selon la valeur de u_0, le sens de variation, la nature et la limite des suites (u_n) vérifiant la relation
$$u_{n+1} = f(u_n)$$
6. Tracer dans le repère ci-joint le parcours de différentes suites (u_n). On s'attachera à illustrer chacune des situations décrites à la question précédente.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. Montrons que les deux suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes :
   –
   $$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} \;>\; 0 \end{aligned}$$
   Donc la suite (S_n) est croissante.
   –
   $$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= S_{n+1} + \frac{1}{3(n+1)^2} - S_n - \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} - \frac{1}{3n^2} \\ &= \frac{3 + n^2 - (n+1)^2}{3n^2(n+1)^2} = \frac{2(1-n)}{3n^2(n+1)^2} \;<\; 0 \end{aligned}$$
   Donc la suite (T_n) est décroissante.
   – $T_n - S_n = \dfrac{1}{3n^2} \to 0$.
   Les suites (S_n) et (T_n) étant adjacentes, elles convergent toutes les deux vers une même limite ℓ.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \leqslant \ell \leqslant T_n$. Autrement dit, ℓ est dans tout intervalle de la forme $[S_n, T_n]$. La distance $T_n - S_n$ valant $\frac{1}{3n^2}$, on obtient l'intervalle voulu dès que $\frac{1}{3n^2} \leqslant 10^{-2}$. Le calcul donne alors $n_0 = 6$ et
   $$\ell \approx S_6 = 1 + \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \approx 1.29$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $$u_{2n} = \cos\left(\left(2n + \frac{1}{2n}\right)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$
   Puisque $\frac{\pi}{2n} \to 0$ et que la fonction cosinus est continue, on a $u_{2n} \to \cos(0) = 1$.
2. $$u_{2n+1} = \cos\left(\left(2n + 1 + \frac{1}{2n+1}\right)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n+1} + (2n+1)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \pi\right)$$
   Puisque $\frac{\pi}{2n} \to 0$, on a $u_{2n+1} \to \cos(\pi) = -1$.

On a donc mis en évidence deux suites extraites de (u_n) qui ont des limites différentes. On peut donc en déduire que la suite (u_n) diverge.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.
$$u_1 = \frac{u_0^2}{u_0+v_0} = \frac{4}{3} \qquad u_2 = \frac{u_1^2}{u_1+v_1} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{16}{15}$$

$$v_1 = \frac{v_0^2}{u_0+v_0} = \frac{1}{3} \qquad v_2 = \frac{v_1^2}{u_1+v_1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{15}$$

2. Soit $\mathcal{P}(n) \;=\;$ "$u_n > 0$ et $v_n > 0$"
   - Par hypothèse, $u_0 = 2 > 0$ et $v_0 = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. On a alors $u_n + v_n > 0$ et d'après les relations de récurrences donnant u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n, on a donc $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   La propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après les relations de récurrences vérifiées par les suites (u_n) et (v_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_n+v_n}$$
   Or d'après la question précédente, $v_n > 0$ donc $u_n + v_n \geqslant u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_n}{u_n} = 1$ La suite (u_n) est donc décroissante.
   En étudiant le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ de la même façon, on montre de même que (v_n) est décroissante.

4. Les suites (u_n) et (v_n) étant décroissantes et minorées par 0, elles convergent et leurs limites respectives sont positives.
5. (a) En passant à la limite "$n \to +\infty$" dans la relation (R_1), on a
$$\ell = \frac{\ell^2}{\ell+\ell'} \iff \ell(\ell+\ell') = \ell^2 \iff \ell^2 + \ell.\ell' = \ell^2 \iff \ell.\ell' = 0$$

   (b) Soit $\mathcal{Q}(n)$: "$u_n - v_n = 1$".
   - Par hypothèse, $u_0 - v_0 = 2 - 1 = 1$. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
   - Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - v_n = 1$. D'après les relations de récurrence vérifiées par (u_n) et (v_n), on a
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} - \frac{v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n+v_n} = \frac{(u_n-v_n)(u_n+v_n)}{u_n+v_n} = u_n - v_n = 1$$
     Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vrai.

   La propriété $\mathcal{Q}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, est elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) D'après les questions précédentes, les limites ℓ et ℓ' sont solutions du système

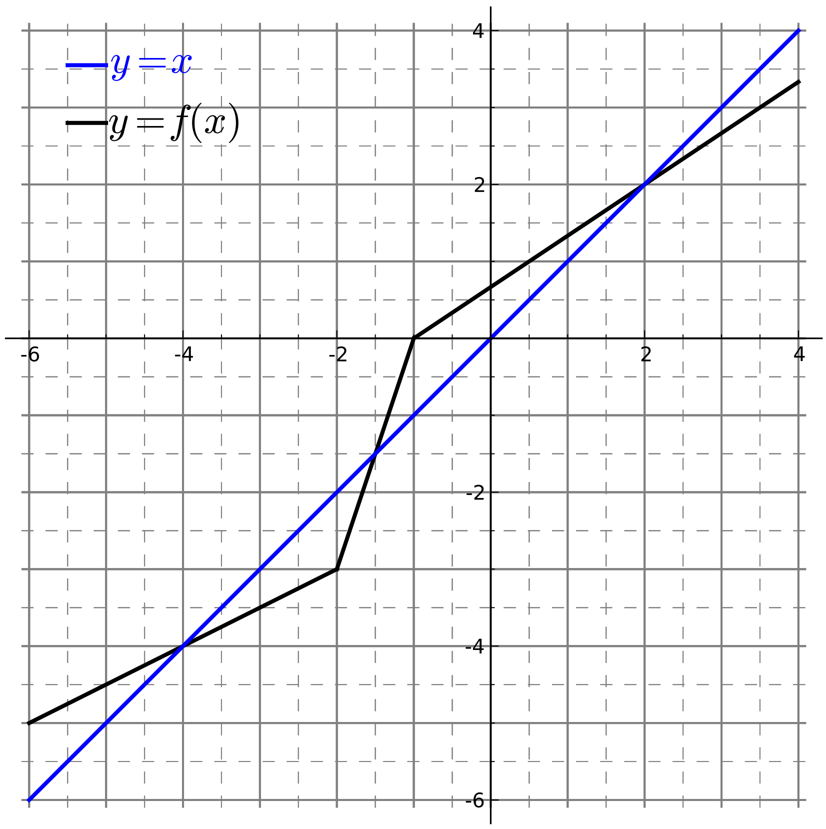
$$(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} \ell.\ell' & = & 0 \\ \ell - \ell' & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (S_1) : \left\{ \begin{array}{lcl} \ell' & = & 0 \\ \ell & = & 1 \end{array} \right. \text{ ou } (S_2) : \left\{ \begin{array}{lcl} \ell & = & 0 \\ \ell' & = & -1 \end{array} \right.$$

D'autre part, on a vu plus haut que les limites ℓ et ℓ' sont positives ou nulles. Seul le système (S_1) vérifié cette dernière condition donc $\ell = 1$ et $\ell' = 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. Sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$, $[-2, -1]$ et $[-1, +\infty[$, la fonction f est définie par une fonction affine de coefficient directeur positive. La fonction f est donc croissante sur chacun de ces intervalles et donc sur $\mathbb{R}$.
2.



3. D'après le graphe ci-dessus, la fonction f possède trois points fixes : $x_1 = -4$, $x_2 = -1.5$ et $x_3 = 2$.
   Par le calcul, on étudie chacun des intervalles intervenant dans la définition de f. Ainsi,
   – sur $]-\infty, -2]$, on a

$$f(x) = x \iff \frac{x-4}{2} = x \iff \frac{x}{2} = -2 \iff x = -4$$

   – sur $[-2, -1]$, on a

$$f(x) = x \iff 3(x+1) = x \iff 2x = -3 \iff x = -1.5$$

– sur $[-1, +\infty[$, on a

$$f(x) = x \iff \frac{2}{3}(x+1) = x \iff \frac{1}{3}x = \frac{2}{3} \iff x = 2$$

On retrouve bien les trois points fixes x_1, x_2 et x_3 lus sur le graphe.

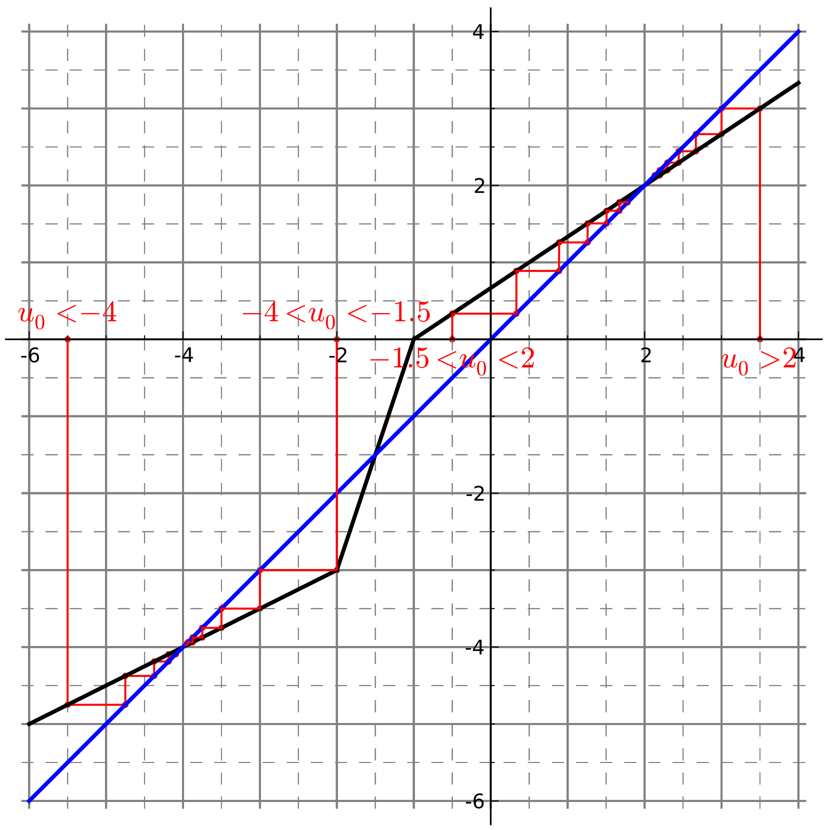
4. D'après le graphique, on a

x	$-\infty$		-4		-1.5		2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$		$-$		$+$		$-$	

Les intervalles stables de f sont donc

$$I_1 =]-\infty, -4], \quad I_2 = [-4, -1.5], \quad I_3 = [-1.5, 2], \quad I_4 = [2, +\infty[.$$

5. (a) Si $u_0 < -4$, la suite (u_n) est croissante. Étant majorée par -4 elle converge. La fonction f étant continue, elle converge donc vers un point fixe qui ne peut être que $x_1 = -4$.
   (b) Si $-4 < u_0 < -1.5$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par -4. Elle converge donc vers x_1.
   (c) Si $-1.5 < u_0 < 2$, la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers 2.
   (d) Si $u_0 > 2$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. Elle converge donc vers 2.
   (e) Si u_0 correspond à l'un des points fixes x_i, la suite (u_n) est constante égale à x_i.
6.



* *
*