CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit $a > 0$. Montrer que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

converge et donner sa limite.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit (p_n) une suite de *nombres entiers* admettant une limite finie. Montrer que la suite (p_n) est stationnaire, i.e.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0,\ p_n = p_{n_0}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = (1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^n)$$

1. Montrer que si $\alpha \geqslant 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
2. On suppose maintenant que $0 < \alpha < 1$.
   (a) Déterminer le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $1 + x \leqslant e^x$ (on pourra étudier rapidement la fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$).
   (c) En déduire un majorant de la suite (u_n) puis sa nature.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 4 Soient $a > 1$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'unique point fixe de f sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante.
5. En déduire la nature puis la limite de (u_n).
6. Soit
$$(v_n) : v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$
   (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = v_n^2$$
   (b) En déduire v_n en fonction de v_0 et n.
   (c) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \sqrt{a}| \leqslant 2a v_0^{2^n}$$
   (d) En déduire la vitesse de convergence de la suite (u_n).
   (e) Dans le cas $a = 2$, déterminer n_0 tel que u_{n_0} donne une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

$\star\ \star$
$\star$

CORRECTION

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$$

Or lorsque $n \to \infty$, on a $\frac{a}{n} \to 0$. On peut donc appliquer le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'expression $\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$:

$$u_n = e^{n\left(\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{a+o(1)}$$

En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$u_n \to e^a$$

Ainsi, (u_n) converge et sa limite est e^a.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 : Supposons que la suite (p_n) converge et notons ℓ sa limite. Par définition, de la convergence, en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|p_n - \ell| < \frac{1}{2}$$

Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$|p_{n+1} - p_n| = |p_{n+1} - \ell + \ell - p_n| \leqslant |p_{n+1} - \ell| + |p_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi, il existe un rang n_0 a partir duquel les p_n sont des entiers distants de moins de 1. Ils sont donc tous égaux (à p_{n_0}) et la suite (p_n) est stationnaire.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Si $\alpha \geqslant 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^k \geqslant 1$ et $(1+\alpha^k) \geqslant 2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 2^n$. Puisque $2^n \to +\infty$, la suite (u_n) diverge également vers $+\infty$.

2. (a) Puisque $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha^k)$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(1+\alpha^k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha^k)} = (1+\alpha^{n+1}) \geqslant 1$$

La suite (u_n) est donc croissante.

(b) En notant $f(x) = e^x - x - 1$, pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = e^x - 1 > 0$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\forall x > 0, \qquad f(x) \geqslant f(0) = 0$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a bien

$$e^x > x + 1$$

(c) D'après la question précédente, pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + \alpha^k < e^{\alpha^k}$$

Ainsi,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \alpha^k) < \prod_{k=1}^{n} e^{\alpha^k} = e^{\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n}$$

On reconnaît en exposant la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^k = \alpha\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad (\text{car } 0 < \alpha < 1)$$

Ainsi,

$$u_n \leqslant e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

La suite (u_n) est donc majorée (la borne ne dépend pas de n). Étant croissante, elle converge.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. Si $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{x^2 - a}{2x^2} = \frac{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{2x^2}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $(x - \sqrt{a})$ et Ainsi

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	

2.

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - x = \frac{a - x^2}{2x} = \frac{(\sqrt{a} - x)(\sqrt{a} + x)}{2x}$$

Ainsi, l'unique solution > 0 de l'équation $f(x) = x$ est bien $x^* = \sqrt{a}$.

3. Par récurrence : soit $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \geqslant \sqrt{a}$".
   - *Initialisation* : puisque $a > 1$, alors $a > \sqrt{a}$ et $u_0 = a > \sqrt{a}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Ainsi, puisque f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, on a

   $$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$$

   et $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

   Par récurrence, on a montré que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} = \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n}$$

   Ainsi, puisque $u_n \geqslant \sqrt{a} > 0$, la différence $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) décroit.
5. Puisque (u_n) est décroissante et minorée (par $\sqrt{a}$ par exemple), elle converge. Elle ne peut converger que vers l'unique point fixe de f, soit $x^*\sqrt{a}$.
6. (a)

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a\right)}{\frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a\right)} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2 \end{aligned}$$

   (b) Par récurrence, on montre que $v_n = v_0^{2^n}$. En effet, $v_0 = v_0^{2^0}$ et si $v_n = v_0^{2^n}$, alors

   $$v_{n+1} = v_n^2 = (v_0^{2^n})^2 = v_0^{2^{n+1}}$$

   (c) D'après les questions précédentes, puisque $0 \leqslant u_n \leqslant a$ et $a > \sqrt{a}$, on a

   $$|u_n - \sqrt{a}| = |u_n + \sqrt{a}| v_n = (u_n + \sqrt{a}) v_0^{2^n} \leqslant 2a v_0^{2^n}$$

   (d) Par définition de la suite (v_n), on a $0 < v_0 = \frac{a - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a}} < 1$. D'après la question précédente, la suite (u_n) converge donc à la vitesse à laquelle la suite $(v_0^{2^n})$ converge vers 0, soit à vitesse quadratique.

   (e) Pour $a = 2$, on a

   $$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 4\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^n}$$

Ainsi, u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près si

$$\begin{aligned}
|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-10} &\Longleftarrow 4\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^n} \leqslant 10^{-10} \\
&\Longleftarrow 2^n \ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{4}\times 10^{-10}\right) \\
&\Longleftarrow 2^n \geqslant \frac{-10\ln(10)-\ln(4)}{\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)} \approx 13.87 \quad \text{car } \ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) \approx -1.76 < 0 \\
&\Longleftarrow n \geqslant \frac{\ln(13.87)}{\ln(2)} \approx 3.79
\end{aligned}$$

Ainsi u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près dès que $n \geqslant 4$.

⋆ ⋆
⋆