CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30. *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$
3. En déduire la nature de (u_n) et la valeur de sa limite éventuelle.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit (u_n) une suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

et on note $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 1$.

1. *Étude qualitative*
   (a) Déterminer l'unique point fixe x^* de f tracer dans le repère ci-joint la courbe de f en faisant apparaître x^*.
   (b) Tracer le parcours de (u_n) dans les cas $u_0 = -1$ puis $u_0 = 4$. Quel semble être le comportement de ces deux suites ?
   (c) Tracer le tableau de signe de $f(x) - x$ et en déduire les variations, la nature et la limite de u_n en fonction de u_0.

2. *Une forme explicite*
   (a) Déterminer une constante α telle que la suite (v_n) définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n + \alpha$$
   soit une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (b) Donner la forme explicite de (v_n) en fonction de u_0 puis celle de (u_n), toujours en fonction de u_0.

(c) Retrouver le comportement de (u_n) en fonction de u_0 déduit de l'étude qualitative ci-dessus.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

1. Montrer que les suites extraites $(v_n) = (u_{2n-1})$ et $(w_n) = (u_{2n})$, définies pour tout $n \geqslant 1$, sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la suite (u_n). On admettra que sa limite est $\ell = \ln 2$.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
1. def Approxln2(d):
2.     n=1
3.     u1=1
4.     u2=0.5
5.     while abs(u1-u2)>10**(-d):
6.         n = n+1
7.         u1 = u1 - 1/(2*n) + 1/(2*n+1)
8.         u2 = u2 + 1/(2*n+1) - 1/(2*n+2)
9.     return u1
```

   (a) Quel est le nom de cette fonction ? Quel(s) en est/sont l'(es) argument(s) ?
   (b) Décrire l'évolution des variables `n`, `u1` et `u2` au cours du programme.
   (c) Quel est la condition d'arrêt de la boucle `while` ouverte à la ligne 5 ?
   (d) Quel est l'objet de cet algorithme ?
   (e) Quel est le rôle de l'argument `d` ?

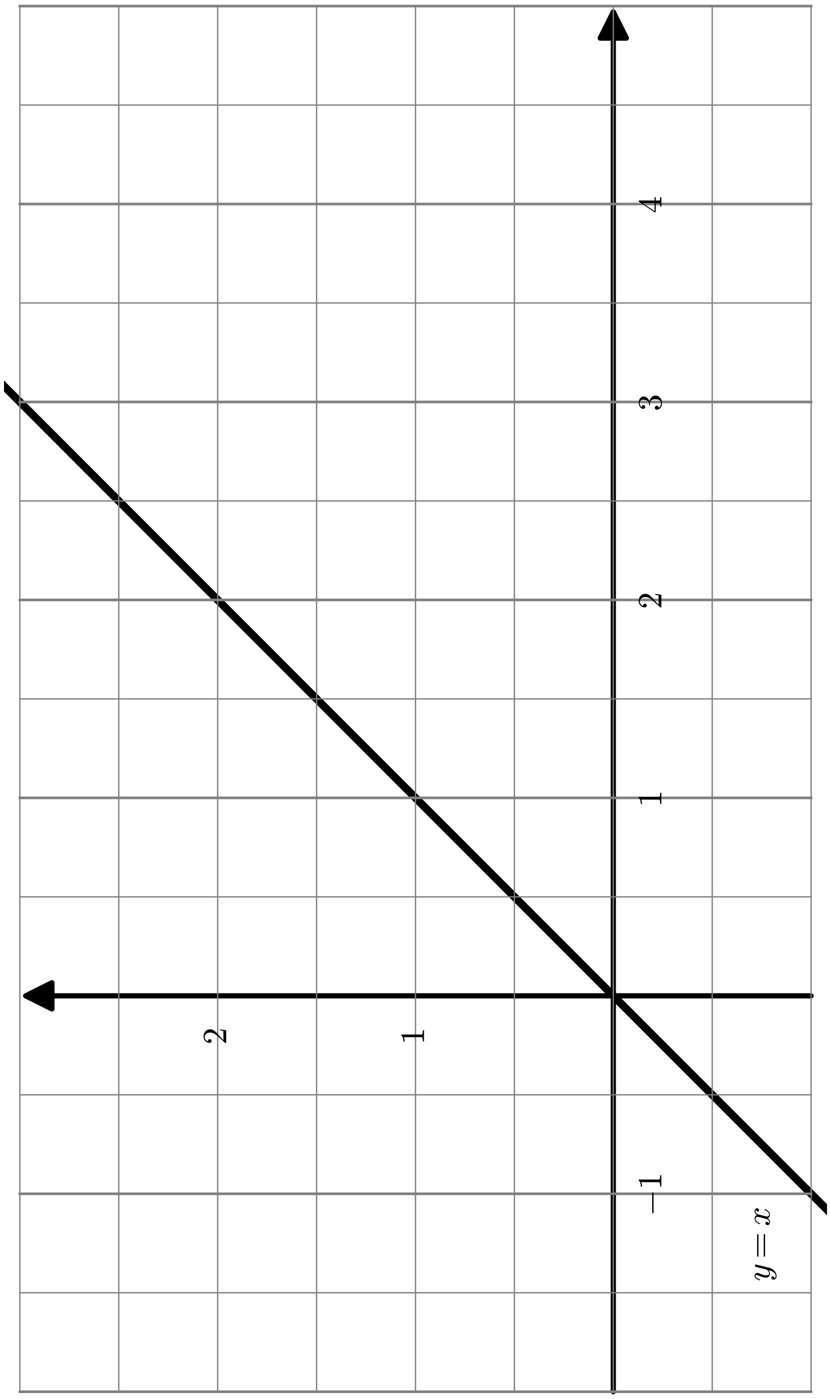
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$

1. Montrer que
$$I_1 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad I_0 + I_1 = 1$$
et en déduire I_0.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$$
3. Montrer que la suite (I_n) est croissante (on pourra comparer les positions relatives des courbes des fonctions $[x \mapsto e^{nx}]$ et $[x \mapsto e^{(n+1)x}]$ sur l'intervalle $[0, 1]$).
4. Montrer que
$$\forall x \in [0, 1], \qquad \frac{e^{nx}}{1+e} \leqslant \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{nx}}{2}$$
5. En déduire un encadrement de I_n.
6. Déterminer la nature et la limite de la suite (I_n).
7. Montrer que $I_n = o_{+\infty}(e^n)$.

⋆ ⋆
⋆

Nom : ....   Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. $u_0 = 1, \quad u_1 = u_0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}, \quad u_2 = u_1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}, \quad u_4 = u_3 + \dfrac{1}{8} = \dfrac{15}{8}.$
2. Soit $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2 - \frac{1}{2^n}$".

   — Initialisation : $u_0 = 1 = 2 - \frac{1}{2^0}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   — Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2 - \dfrac{1}{2^n}$. Alors

   $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

   La propriété étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Puisque $2^n \to +\infty$, la suite (u_n) converge vers 2.

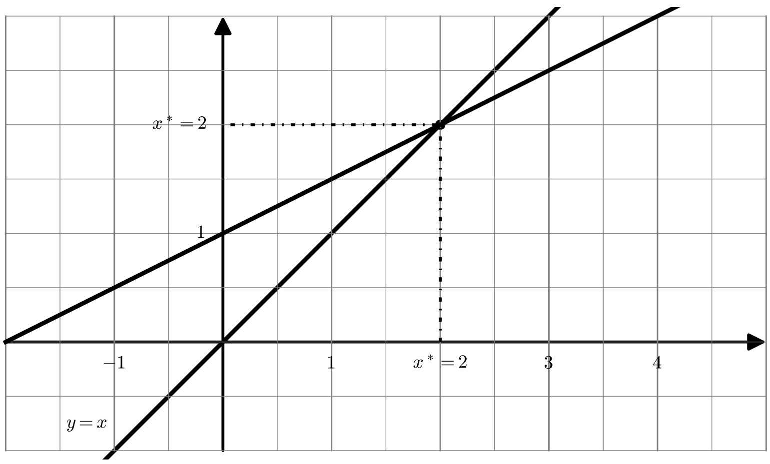
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

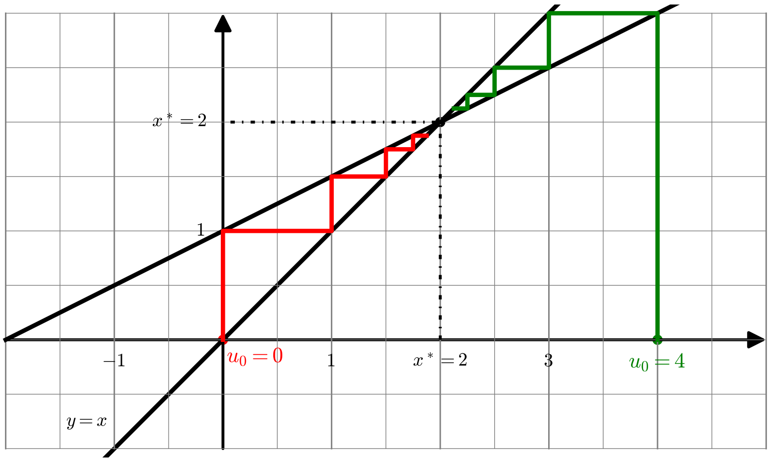
1. (a) Les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Or

   $$f(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 1 = x \iff x = 2$$

   La fonction f admet donc $x^* = 2$ comme unique point fixe.



   (b) D'après le dessin ci-dessous, les deux suites semblent converger vers 2, l'une en croissant, l'autre en décroissant.



(c) Puisque $f(x) - x = -\frac{1}{2}x + 1$, on a

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	
variations de (u_n)		croissante		decroissante	

D'après le tableau ci-dessus, on déduit que

— si $u_0 < 2$, la suite (u_n) croit et converge vers 2,
— si $u_0 > 2$, la suite (u_n) décroit et converge vers 2,
— si $u_0 = 2$, la suite (u_n) est constante égale à 2

(ce qui est en accord avec les observations graphiques faites à la question précédente).

2. (a) On cherche maintenant une constante α telle que si $v_n = u_n + \alpha$ alors la suite (v_n) vérifie $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + \alpha}{u_n + \alpha} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 1 + \alpha}{u_n + \alpha} = \frac{\frac{1}{2}(u_n + \alpha) + 1 + \frac{\alpha}{2}}{u_n + \alpha} = \frac{1}{2} + \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{u_n + \alpha}$$

Donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2} \iff 1 + \frac{\alpha}{2} \iff \boxed{\alpha = -2}$$

(b) Si (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puisque $v_0 = u_0 - 2$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{u_0 - 2}{2^n}$$

et puisque $(v_n) = (u_n - 2)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 + \frac{u_0 - 2}{2^n}$$

(c) On retrouve le résultat de la question précédente : la suite (u_n) converge vers 2 quelque soit le point de départ u_0 et elle est croissante si $u_0 - 2 < 0$ et décroissante si $u_0 - 2 > 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Pour montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes, on doit montrer l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur limite tend vers 0. Or puisque $(v_n) = (u_{2n-1})$, on a pour tout $n \geqslant 1$

$$v_n = u_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

D'où

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{2n-(2n+1)}{2n(2n+1)} \\ &= -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

De même, puisque $(w_n) = (u_{2n})$, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$w_n = u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = u_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

D'où

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{-(2n+1)+(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

donc la suite (w_n) est croissante.

Enfin,

$$v_n - w_n = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Donc $v_n - w_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les suites (v_n) et (w_n) sont donc adjacentes.

2. Les deux suites extraites étant adjacentes, elles convergent et ont la même limite ℓ. D'autre part, puisqu'à elles deux elles recouvrent l'ensemble des termes de la suite (u_n), alors (u_n) converge également vers ℓ.

3. (a) La fonction s'appelle `Approxln2` et prend un unique argument `d`.
   (b) Aux lignes 2 à 4, les variable du programme sont initialisées :

   — `n` prend la valeur du premier entier 1,
   — `u1` prend la valeur $u_1 = 1$,

— `u2` prend la valeur $u_2 = 0.5$.

Ensuite, au cours de la boucle, la variable `n` est incrémentée de 1, tandis que les variables `u1` et `v1` prennent respectivement pour valeur $v_n = u_{2n-1}$ et $w_n = u_{2n}$.

(c) La boucle `while` s'arrête au premier entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel la distance $|u_{2n-1} - u_{2n}|$ est inférieure à 10^{-d}.

(d) & (e) Le programme ci-dessus parcours les termes de la suite (u_n) jusqu'à obtenir deux termes consécutifs dont la distance est inférieure à une précision 10^{-d} entrée par l'utilisateur.

D'après l'étude précédente, la limite $\ell = \ln 2$ de (u_n) est toujours coincée entre deux termes consécutifs. Si $|u_{2n-1} - u_{2n}| < 10^{-d}$, n'importe quel nombre réel de l'intervalle $[u_{2n}, u_{2n-1}]$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-d} près, en particulier le terme u_{2n-1} stocké dans la variable `u1` à la fin de la boucle `while` et renvoyé par le programme `Approxln2`.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$. On reconnaît ici une fonction de la forme "$\frac{u'}{u}$" avec $u(x) = 1 + e^x$. Ainsi

$$I_1 = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

D'autre part

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x}dx = \int_0^1 dx = 1$$

On en déduit

$$I_0 = I_0 + I_1 - I_1 = 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{1+e^x}dx \\ &= \int_0^1 e^{nx}dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n} \end{aligned}$$

3. La fonction exp étant croissante, on a

$$\forall x \in [0,1], \qquad e^{nx} \leqslant e^{(n+1)x}$$

Donc

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}$$

puisque $1 + e^x > 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $I_n \leqslant I_{n+1}$. La suite (I_n) est donc croissante.

4. La fonction exponentielle étant croissante, on a également

$$\forall x \in [0,1], \qquad 1 = e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1 = e$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \qquad & 2 \leqslant 1+e^x \leqslant 1+e \\ \iff \quad & \frac{1}{1+e} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2} \\ \iff \quad & \frac{e^{nx}}{1+e} \leqslant \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leqslant \frac{e^{nx}}{2} \end{aligned}$$

car $e^{nx} > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

5. En intégrant l'inégalité ci dessus, on obtient

$$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e} dx \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2} dx$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e} dx &= \frac{1}{1+e} \int_0^1 e^{nx} dx = \frac{e^n - 1}{n(1+e)} \\ \int_0^1 \frac{e^{nx}}{2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{nx} dx = \frac{e^n - 1}{2n} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{e^n - 1}{n(1+e)} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^n - 1}{2n}$$

6. Par croissances comparées, les deux bornes ci dessus tendent vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. D'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) diverge également vers $+\infty$.

7. D'après l'inégalité établie à la question 5, on a

$$\frac{e^n - 1}{e^n . n(1+e)} = \frac{1 - e^{-n}}{n(1+e)} \leqslant \frac{I_n}{e^n} \leqslant \frac{e^n - 1}{e^n . 2n} = \frac{1 - e^{-n}}{2n}$$

Les deux bornes établies ici tendant vers 0, on a, toujours d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{+\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$$

et par définition, $I_n = o_{+\infty}(e^n)$.

⋆ ⋆
⋆