CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

1. Montrer que (u_n) admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.
2. À l'aide d'un développement asymptotique, déterminer une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que

   $$u_n - \ell = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On rappelle le développement limité suivant (pour x au voisinage de 0) :

   $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

   Comment qualifier la vitesse de convergence de la suite (u_n) ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $a \in]0,1[$ et (u_n) la suite récurrente définie par

$$(u_n) \ : \ \begin{cases} u_0 & = \quad a \\ u_{n+1} & = \quad \dfrac{n+u_n}{n+1} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 en fonction de a.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n < 1$.
3. Déterminer le sens de variation de (u_n).
4. Montrer que (u_n) admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.
5. Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{n+1}$$

6. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 1 + \frac{a-1}{n!}$$
Comment qualifier la vitesse de convergence de la suite (u_n) ?

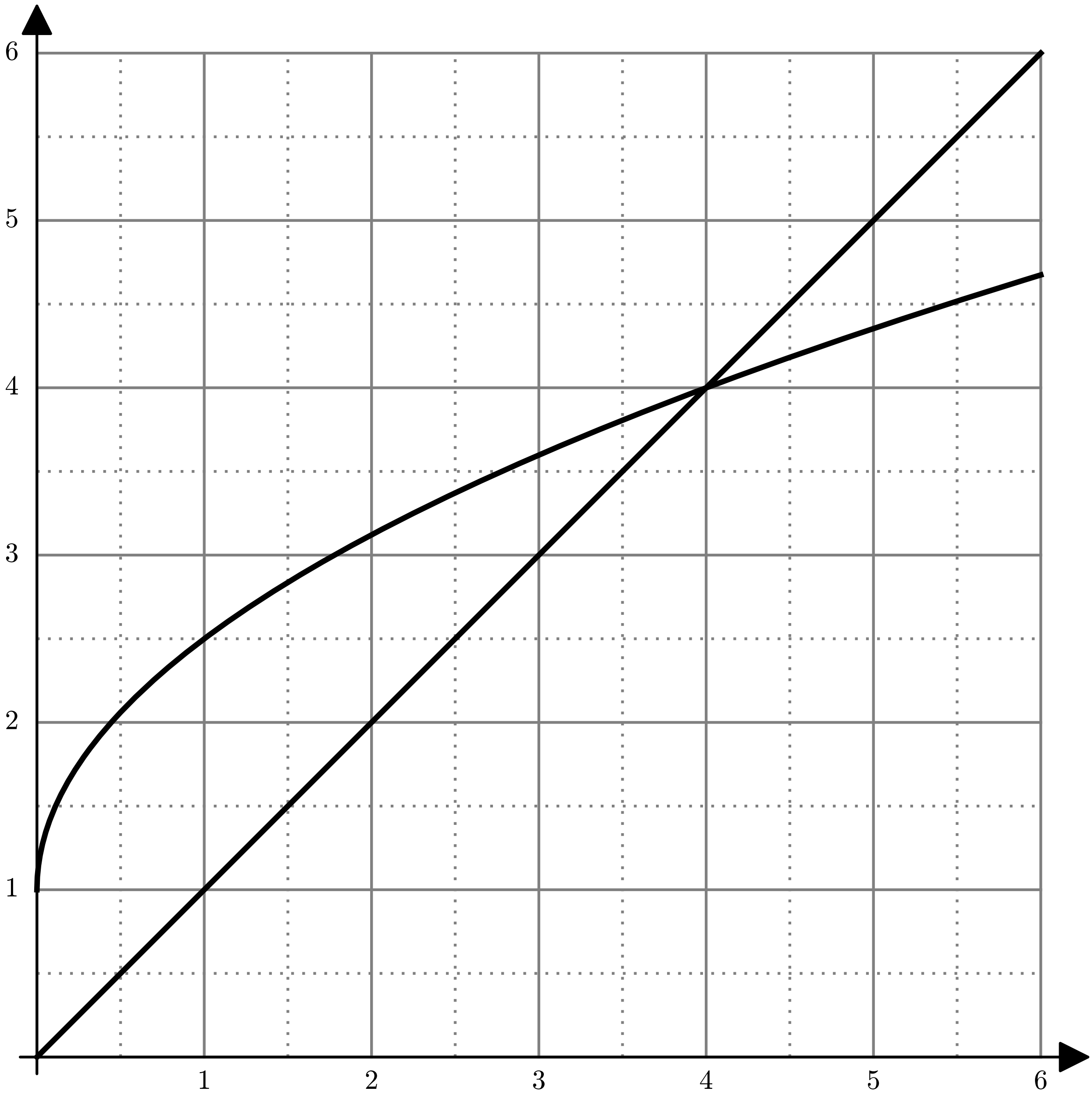
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient
$$f\,:\,x \longmapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}+1$$
et (u_n) une suite numérique vérifiant $u_0 \geqslant 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que $x^* = 4$ est l'unique point fixe de f.
3. Sur le graphe ci-contre, tracer le parcours de la suite (u_n) dans les cas $u_0 = 0.5$ et $u_0 = 5.5$. Quel semble être le comportement de ces suites ?
4. Dresser le tableau de signes de $f(x) - x$ et déterminer, en fonction de $u_0 \geqslant 0$, le comportement, la nature et la limite de (u_n).
5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sqrt{u_{n+1}} - 2 = \frac{3}{2\left(\sqrt{u_{n+1}}+2\right)}\left(\sqrt{u_n}-2\right)$$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|\sqrt{u_{n+1}} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|\sqrt{u_n}-2|$$
et en déduire une majoration de $|\sqrt{u_n}-2|$ en fonction de $|\sqrt{u_0}-2|$.
7. Montrer que la suite (v_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = 2^n|u_n - 4|$$
est bornée et en déduire la vitesse de convergence de la suite (u_n).

⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \\ &= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\ &= n\frac{(\cancel{1}+\frac{1}{n}-\cancel{1})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \longrightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. À l'aide du développement limité proposé, avec $x = \frac{1}{n}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right) \\ &= n\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{1}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La constante cherchée est $a = \frac{1}{8}$ et la suite (u_n) converge vers sa limite à une vitesse polynomiale (de degré 1), soit assez lentement.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{0+u_0}{0+1} = a \\ u_2 &= \frac{1+u_1}{1+1} = \frac{1+a}{2} \\ u_3 &= \frac{2+u_2}{2+1} = \frac{5+a}{6} \end{aligned}$$

2. Par récurrence : soit $\mathcal{P}(n)$: " $0 < u_n < 1$ "

   — <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, on a par définition $u_0 = a \in]0, 1[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   — <u>Hérédité</u> : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 1 &\iff n < n + u_n < n + 1 \\ &\iff \frac{n}{n+1} < \frac{n+u_n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} \\ &\iff 0 < \frac{n}{n+1} < u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également et, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n + u_n}{n+1} - u_n \\ &= \frac{n + \cancel{u_n} - (n + \cancel{1})u_n}{n+1} \\ &= \frac{n(1 - u_n)}{n+1} \end{aligned}$$

   Or d'après la question précédente, on a $0 < u_n < 1$ donc $0 < 1 - u_n < 1$ et $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

4. D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée (par 1 notamment). Elle est donc convergente et sa limite $\ell \in [0, 1]$.
   Mais alors, puisque (u_n) est bornée, le quotient $\frac{n+u_n}{n+1}$ tend vers 1. Donc en passant à la limite $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), on obtient $\ell = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{n + u_n}{n+1} - 1 \\ &= \frac{\cancel{n} + u_n - (\cancel{n} + 1)}{n+1} \\ &= \frac{u_n - 1}{n+1} \end{aligned}$$

6. Par récurrence : on pose $\mathcal{P}(n)$: " $u_n - 1 = \frac{a-1}{n!}$ ".

   — <u>Initialisation</u> : pour $n = 0$, $u_0 - 1 = a - 1 = \frac{a-1}{0!}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— <u>Hérédité</u> : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n - 1}{n+1} \\ &= \frac{\frac{a-1}{n!}}{n+1} \quad \text{par HR} \\ &= \frac{a-1}{(n+1).n!} \\ &= \frac{a-1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également et, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) converge donc vers sa limite $\ell = 1$ à la vitesse de $n!$, soit très rapidement.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. La fonction f est définie pour tout $x \geqslant 0$. D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 \geqslant 1$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 1$.

2. Puisque $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$, on résout l'équation $f(x) = x$ sur $[1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 = x \\ &\iff \frac{3}{2}\sqrt{x} = x - 1 \\ &\iff \frac{9}{4}x = (x-1)^2 \quad \text{car } x - 1 \geqslant 0 \\ &\iff 4x^2 - 17x + 4 = 0 \end{aligned}$$

On a alors

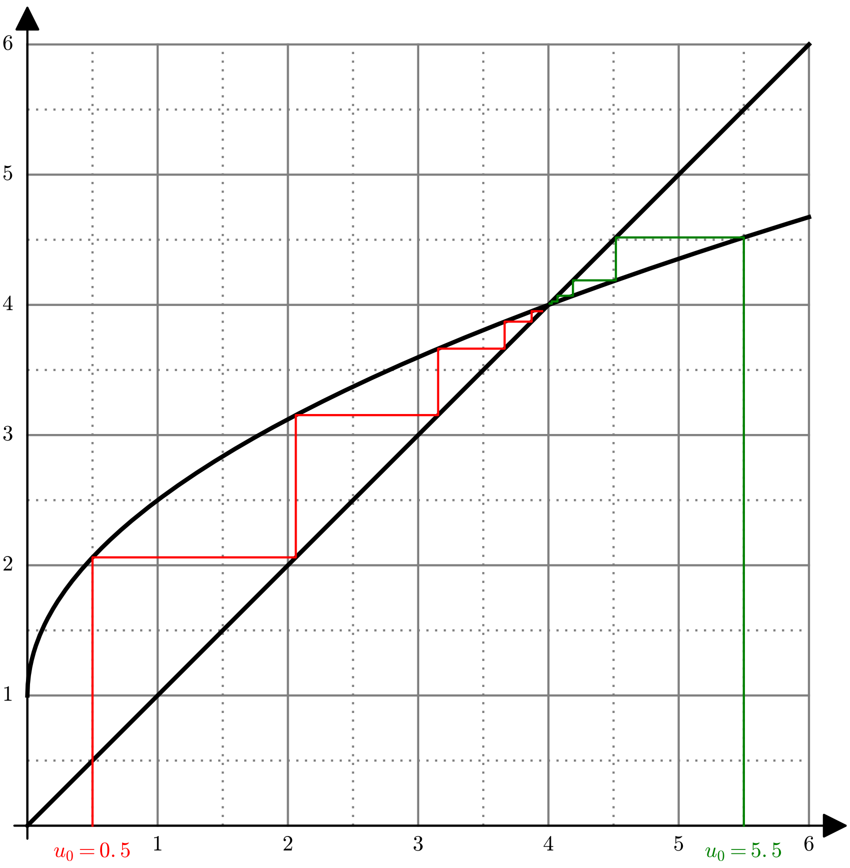
$$\Delta = 17^2 - 4^3 = 225 = 15^2$$

et

$$x^* = \frac{17 \pm 15}{8}$$

D'où $x^* = 4$ ou $x^* = \frac{1}{4}$. Puisque $\frac{1}{4}$ n'est pas dans l'intervalle $[1, +\infty[$, le seul point fixe de f est bien $x^* = 4$.

3.



Chacune de ces suites semble converger vers x^*.

4. D'après les calculs précédents, la quantité $f(x) - x = \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 - x$ s'annule uniquement pour $x = 4$. Elle est donc de signe constant sur $[0, 4[$ et sur $]4, +\infty[$. Or

$$f(0) = 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad f(9) = \frac{9}{2} + 1 - 9 < 0$$

D'où

x	0		4		$+\infty$
$f(x) - x$	1	$+$	0	$-$	

D'après ce tableau :

— si $0 \leqslant u_0 < 4$, la suite (u_n) est croissante et majorée par 4. Elle converge donc vers 4, l'unique point fixe de f.
— si $u_0 > 4$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 4. Elle converge donc là encore vers 4.
— si $u_0 = 4$, la suite (u_n) est constante égale à 4.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{u_{n+1}} - 2 &= (\sqrt{u_{n+1}} - 2) \times \frac{\sqrt{u_{n+1}} + 2}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} \\
&= \frac{u_{n+1} - 4}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} \\
&= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{u_n} + 1 - 4}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} \\
&= \frac{3\left(\sqrt{u_n} - 2\right)}{2\left(\sqrt{u_{n+1}} + 2\right)}
\end{aligned}$$

6. D'après la première question, pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} \geqslant 1$. Donc $\sqrt{u_{n+1}} \geqslant 1$ et

$$\frac{3}{2\left(\sqrt{u_{n+1}} + 2\right)} \leqslant \frac{3}{2\,(1+2)} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, d'après l'inégalité établie à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\sqrt{u_{n+1}} - 2| = \frac{3}{2\left(\sqrt{u_{n+1}} + 2\right)}\,|\sqrt{u_n} - 2| \leqslant \frac{1}{2}\,|\sqrt{u_n} - 2|$$

Par récurrence, on montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\sqrt{u_n} - 2| \leqslant \frac{1}{2^n}|\sqrt{u_0} - 2|$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= 2^n|u_n - 4| \\
&= 2^n|\sqrt{u_n} - 2|.|\sqrt{u_n} + 2| \\
&\leqslant \cancel{2^n}.\frac{1}{\cancel{2^n}}|\sqrt{u_0} - 2|.|\sqrt{u_n} + 2| \\
&\leqslant |\sqrt{u_0} - 2|.|\sqrt{u_n} + 2|
\end{aligned}$$

Or la suite (u_n) étant convergente, elle est bornée. Il en est donc de même pour la suite $(|\sqrt{u_n} + 2|)$ et pour la suite (v_n).

Par définition, on vient d'établir que $|u_n - 4| = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Autrement dit, la suite (u_n) converge vers 4 à la vitesse d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

⋆ ⋆
⋆