CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite finie ℓ.

1. On suppose ici que $\ell < 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
   (b) En déduire la nature de la suite (u_n).
   (c) Montrer que $\lim u_n = 0$. On pourra s'appuyer sur un raisonnement par l'absurde.

2. On suppose ici que $\ell > 1$.
   Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. On pourra là encore s'appuyer sur un raisonnement par l'absurde.

3. Montrer à l'aide d'exemples que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire sur la nature de la suite (u_n).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$$

converge et donner sa limite.
<u>Ind.</u> : on pourra s'appuyer sur le développement limité $\ln(1+u) = u + o(u)$

2. Soit $\beta > 0$.
   (a) Donner la limite $\lim \sqrt[n]{\beta}$.
   (b) Donner un équivalent simple de $\sqrt[n]{\beta} - 1$.
   <u>Ind.</u> : on pourra s'appuyer sur le développement limité $e^u = 1 + u + o(u)$

3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit

$$(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2^n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$$
4. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
5. Montrer que
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n-1}}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soient

- $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- (u_n) une suite récurrente vérifiant la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est monotone. On pourra s'appuyer sur le sens de variation de la fonction f.
2. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe x^* à déterminer et donner les intervalles stables de f.
3. Montrer que, quelque soit le point de départ u_0, la suite (u_n) converge vers x^*.
4. On suppose ici que $u_0 \neq 0$.
En calculant de deux façons différentes la somme
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right)$$
déterminer un équivalent simple de u_n en $+\infty$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, alors, à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. La suite (u_n) étant strictement positive, elle est alors décroissante.

   (b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0). Donc elle converge. Notons a sa limite.

   (c) Supposons que $a \neq 0$. Par continuité, on a

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{a} = 1$$

   ce qui contredit notre hypothèse sur ℓ. Donc $a = 0$.

2. Si $\ell > 1$, alors la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

   Supposons maintenant que (u_n) est majorée. Dans ce cas, elle converge vers une limite a. Mais alors, là encore, on a

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{a} = 1$$

   ce qui est absurde. On en déduit que la suite (u_n) n'est pas majorée. Étant croissante, elle tend vers $+\infty$.

3. — La suite (u_n) définie par $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est strictement positive, tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

   — La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est strictement positive, tend vers 0 et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

   Nous avons ainsi deux suites aux comportements radicalement différents dont le quotient de deux termes consécutifs tend vers 1. Dans ce cas, l'étude de ce quotient ne permet donc pas de conclure sur la nature de la suite étudiée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}$$

   Or lorsque $n \to \infty$, on a $\frac{\alpha}{n} \to 0$. On peut donc appliquer le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'expression $\ln\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$:

$$u_n = e^{n\left(\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\alpha+o(1)}$$

   En passant à la limite $n \to +\infty$, on obtient

$$u_n \to e^{\alpha}$$

2. (a) Pour tout $\beta > 0$, on a

$$\sqrt[n]{\beta} = \beta^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(\beta)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

   (b) En appliquant le développement limité proposé, on a

$$\sqrt[n]{\beta} = e^{\frac{1}{n}\ln(\beta)} = 1 + \frac{1}{n}\ln(\beta) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   D'où

$$\sqrt[n]{\beta} - 1 = \frac{1}{n}\ln(\beta) + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln(\beta)}{n}$$

3. D'après la question précédente, on a

$$\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} = \frac{2 + \frac{\ln(a)}{n} + \frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2} = 1 + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   et

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)} = e^{n\ln\left(1+\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

   Puisque $\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, on peut là encore appliquer le développement limité de $\ln(1+u)$:

$$\ln\left(1 + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   et

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}+o(1)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}} = \sqrt{ab}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On a

$$u_1 = \frac{1 + u_0}{2^0} = 1, \quad u_2 = \frac{1 + u_1}{2^1} = 1, \quad u_3 = \frac{1 + u_2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

2. On raisonne par récurrence. La propriété étant vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, il nous reste à montrer l'hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. on a alors

$$1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 2$$

   et

$$0 \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2^n} \leqslant \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1$$

   dès que $n \geqslant 1$. Ainsi, la propriété souhaitée est vraie à partir de $n = 1$ et également vraie pour $n = 0$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On raisonne là encore par récurrence. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a bien $u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}$. Supposons maintenant que cela est vrai pour un $n \geqslant 1$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1+u_n}{2^n} \leqslant \frac{1+1}{2^n} && \text{d'après la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité de la propriété à démontrer.

4. Puisque $\frac{1}{2^{n-2}} \to 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a également

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

5. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), on a

$$2^n u_{n+1} = 1 + u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Autrement dit,

$$u_{n+1} \sim \frac{1}{2^n}$$

et donc

$$u_n \sim \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 4 :

1. On étudie le sens de variation de la fonction f à l'aide de sa dérivée : la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{1.\sqrt{1+x^2} - x.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la suite (u_n) est donc monotone.

2. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation $f(x) = x$. Or

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1+x^2}} = \cancel{x} \\ &\iff \sqrt{1+x^2} = 1 \\ &\iff 1 + x^2 = 1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

La fonction f admet donc $x^* = 0$ comme unique point fixe.
Les intervalles stables de f sont donc

$$I_1 =]-\infty, 0[\qquad \text{et} \qquad I_2 =]0, +\infty[$$

3. Pour déterminer la nature de la suite (u_n), on s'appuie sur le tableau de signe de $f(x)-x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x = x\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\sqrt{1+x^2} > 1$. Donc $f(x) - x$ est du signe de $-x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

— Si $u_0 \in I_1$, on a $f(u_0) - u_0 > 0$. La suite (u_n) est donc croissante. L'intervalle I_1 étant stable pour f, on a également $u_n \in I_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite (u_n) est alors également majorée (par 0), donc elle converge. La fonction f étant continue, (u_n) converge alors vers l'unique point fixe de f.

— Si $u_0 \in I_2$, on a $f(u_0) - u_0 < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. L'intervalle I_2 étant stable pour f, on a également $u_n \in I_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite (u_n) est alors également minorée (par 0), donc elle converge. La fonction f étant continue, (u_n) converge là enocre vers l'unique point fixe de f.

— Si $u_0 = 0$, la suite (u_n) est constante égale à 0.

4. La somme S_n est une somme télescopique. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right)$$

Par ailleurs, d'après la relation de récurrence vérifiée par (u_n), on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cancel{1} + u_k^2}{u_k^2} - \cancel{\frac{1}{u_k^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\frac{1}{nu_n^2} - \frac{1}{nu_0^2} = 1 \iff \frac{1}{nu_n^2} = 1 + \frac{1}{nu_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Donc

$$u_n^2 \sim \frac{1}{n}$$

et

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

⋆ ⋆
⋆