CONTRÔLE CONTINU

Suites numériques

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

On rappelle que, par convention, $0! = 1$.

1. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ qui vérifie
$$2 \leqslant \ell \leqslant 3$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n!}$$
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

Bonus Conjecturer la valeur exacte de la limite ℓ.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *Un modèle économique*

À l'échelle nationale, les économistes distinguent un certain nombre d'indicateurs annuels permettant de modéliser l'économie globale d'un pays. Ainsi, on note

R_n = le revenu national au cours de l'année n,
C_n = la consommation nationale de l'année n,
I_n = l'investissement de l'année n,
D_n = la dépense nationale de l'année n,
s = la propension marginale à consommer (constante d'une année sur l'autre),
v = le rapport de l'investissement (constant d'une année sur l'autre).

Les lois de l'économie permettent alors de relier entre eux ces indicateurs et leurs valeurs d'une année sur l'autre. Précisément,

$$\forall n \geqslant 2, \quad \left\{ \begin{array}{lcll} R_n & = & C_n + I_n + D_n & (E_1) \\ C_n & = & s\,R_{n-1} & (E_2) \\ I_n & = & v\,s\,(R_{n-1} - R_{n-2}) & (E_3) \end{array} \right.$$

Pour simplifier le modèle, on suppose en outre ici que la dépense nationale est constante égale à 1 d'une année sur l'autre et on estime que $s = 1.5$ et $v = 0.5$.

1. À l'aide des relations données ci-dessus, montrer que la suite (R_n) vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{n+2} \;=\; 2.25\, R_{n+1} - 0.75\, R_n + 1 \qquad\qquad (RR_1)$$

2. On s'intéresse ici aux suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 2.25\, u_{n+1} - 0.75\, u_n \qquad\qquad (RR_2)$$

   (a) Donner le polynôme caractéristique de la relation (RR_2) et déterminer ses racines $r_1 < r_2$. On en donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

   (b) Montrer que les suite (r_1^n) et (r_2^n) vérifient la relation (RR_2).

3. Montrer que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite

$$(R_n) \,:\, R_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n - 2$$

   vérifie la relation de récurrence (RR_1).

4. Déterminer les constantes λ et μ associées aux conditions initiales

$$R_0 = 1.5 \qquad \text{et} \qquad R_1 = 1.8$$

   (On donnera ici des valeurs approchées à 10^{-1} près).

5. En déduire une approximation du revenu national au cours de l'année 4.
6. En supposant que l'évolution suit le même modèle d'année en année, que dire de l'évolution du revenu national au bout d'un temps long ? On donnera un équivalent de R_n en l'infini ainsi qu'un qualificatif de sa vitesse de divergence.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit $a > 1$ un réel fixé. On note (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 & = \; a \\ u_{n+1} & = \; \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

On souhaite déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
2. Montrer <u>sans récurrence</u> que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire la nature de la suite (u_n).
6. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$$

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Suites numériques - 2020-2021

Exercice 1 :

1. •

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (u_n) est strictement croissante.

•

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et la suite (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

2. Au vue des résultats obtenus ci-dessus, on montre que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En effet, ces deux suites sont monotones de sens différents et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - v_n| = \frac{1}{n!} \longrightarrow 0$$

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, étant donné le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), on a

$$u_1 = 2 \leqslant \ell \leqslant v_1 = 3$$

3. De façon générale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Ainsi,

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - v_n| = \frac{1}{n!}$$

4. D'après le calcul ci-dessus, le réel u_n est un valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près dès que $\frac{1}{n!} \leqslant 10^{-2}$.
Or $5! = 120 > 100$ donc

$$u_n = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 2.717$$

est une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

Bonus on reconnaît ici une valeur approchée du réel e.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. En injectant les égalités (E_2) et (E_3) dans (E_1), on obtient

$$\forall n \geqslant 2, \quad R_n \; = \; s\,R_{n-1} + vs\,(R_{n-1} - R_{n-2}) + D = 2.25\,R_{n-1} - 0.75\,R_{n-2} + 1$$

On retrouve la relation (RR_1) à l'aide du décalage d'indice $n \rightsquigarrow n+2$.

2. (a) Le polynôme cherché est

$$P(X) = X^2 - 2.25X + 0.75 = X^2 - \frac{9}{4}X + \frac{3}{4}$$

Son discriminant est

$$\Delta = \frac{81}{16} - 3 = \frac{81-48}{16} = \frac{33}{16}$$

et ses racines sont

$$r_1 = \frac{\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}}{2} \approx 0.4 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}}{2} \approx 1.8$$

(b) Pour chacune des deux racines r_i ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, r_i^{n+2} - 2.25 r_i^{n+1} + 0.75 r_i^n &= r_i^n \left(r_i^2 - 2.25 r_i + 0.75\right) \\ &= r_i^n \times P(r_i) \\ &= 0 \text{ car } P(r_i) = 0 \end{aligned}$$

Donc les suite (r_1^n) et (r_2^n) vérifient la relation $(*)$.

3. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} R_{n+2} &= \lambda\, r_1^{n+2} + \mu\, r_2^{n+2} - 2 \\ &= \lambda\,(2.25\, r_1^{n+1} - 0.75\, r_1^n) + \mu\,(2.25\, r_2^{n+1} - 0.75\, r_2^n) - 2 \\ &= 2.25(\lambda\, r_1^{n+1} + \mu\, r_2^{n+1}) - 0.75(\lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n) - 2 \\ &= 2.25(R_{n+1} + 2) - 0.75(R_n + 2) - 2 \\ &= 2.25\, R_{n+1} - 0.75\, R_n + 1 \end{aligned}$$

On retrouve ici la relation cherchée.

4. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$R_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n - 2$$

on a en particulier

$$\begin{array}{lll} n = 0 & \Rightarrow & R_0 = \lambda + \mu - 2 = 1.5 \\ n = 1 & \Rightarrow & R_1 = \lambda\, r_1 + \mu\, r_2 - 2 = 1.8 \end{array}$$

Le couple (λ, μ) cherché est donc le couple solution du système

$$\left\{ \begin{array}{lll} \lambda + \mu & = & 3.5 \\ \lambda\, r_1 + \mu\, r_2 & = & 3.8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 3.5 - \lambda \\ \lambda\, r_1 + (3.5 - \lambda)\, r_2 = 3.8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{3.8 - 3.5\, r_2}{r_1 - r_2} \approx 1.85 \\ \\ \mu = 3.5 - \lambda \approx 1.65 \end{array} \right.$$

5. D'après les calculs ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$R_n = 1.85\, r_1^n + 1.65\, r_2^n - 2$$

On a en particulier

$$R_4 = 1.85\, r_1^4 + 1.65\, r_2^4 - 2 \approx 16.97$$

6. Puisque $0 < r_1 < 1$ et $r_2 > 1$, on a

$$R_n \sim 1.65\, r_2^n$$

Autrement dit, le revenu national tend vers l'infini à vitesse géométrique.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On raisonne ici par récurrence. Ainsi, on pose

$$\mathcal{P}(n) \,:\, u_n > 0$$

Par hypothèse, on a $u_0 = a > 1 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), on a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) > 0$$

La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire. Étant également vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{u_n^2}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4u_n^2} - a \\ &= \frac{u_n^4 - 2au_n^2 + a^2}{4u_n^2} \\ &= \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2} \end{aligned}$$

3. Par hypothèse, on a $u_0 = a > \sqrt{a}$ puisque $a > 1$.
Par ailleurs, d'après le calcul précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1}^2 - a > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1}^2 > a$$

Par ailleurs, d'après le résultat obtenu à la question précédente, $u_{n+1} > 0$. On en déduit que $u_{n+1} > \sqrt{a}$.

Ainsi, $u_0 > \sqrt{a}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{a}$. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - u_n \\ &= \frac{a - u_n^2}{2u_n} < 0 \ \text{ car } u_n > \sqrt{a} \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (u_n) étant décroissante et minorée (par $\sqrt{a}$), elle converge.

6. Notons ℓ la limite de la suite (u_n) (dont l'existence a été établie à la question précédente). En passant à la limite "$n \to +\infty$" dans la relation de récurrence vérifiée par la suite u_n, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) &\Leftrightarrow \frac{\ell}{2} - \frac{a}{2\ell} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell^2 - a = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ell - \sqrt{a})(\ell + \sqrt{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell \in \{\pm\sqrt{a}\} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la suite (u_n) étant positive, sa limite est positive. On en déduit $\ell = \sqrt{a}$.

⋆ ⋆
⋆