CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Suites numériques

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{1+\frac{3}{n}} - \ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite $\ell \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent de $|u_n - \ell|$ en $+\infty$.
   Ind. : on pourra s'appuyer sur les développements limités ci-dessous.

- $(1+h)^\alpha \quad = \quad 1 + \alpha h + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}h^n + o(h^n)$
- $\ln(1+h) \quad = \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\,x^k}{k} + o(x^n)$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Soit

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \qquad (*) \end{cases}$$

1. Donner la fonction φ associée à la relation de récurrence $(*)$ et déterminer son unique point fixe x^*.
2. Soit (v_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_n - x^*$$

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) En déduire explicitement v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

(c) Donner la nature et la limite éventuelle de la suite (u_n).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est d'étudier les suites numériques définies par

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in [-1, 1], \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n^2} \end{cases}$$

1. Soit $\varphi : x \longmapsto \dfrac{2x}{1 + x^2}$

   (a) Donner le domaine de définition de φ.

   (b) Dresser le tableau de variation de φ.

   (c) Déterminer les points fixes de φ.

2. On suppose ici que $u_0 \in]0, 1[$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0, 1[$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (c) En déduire la nature de (u_n).

   (d) Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3. On suppose ici que $u_0 \in] - 1, 0[$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers -1.

   Ind. : on pourra étudier la suite $(v_n) = (-u_n)$.

4. *Bilan*

   Donner le comportement, la nature et la limite de la suite (u_n) en fonction de $u_0 \in [-1, 1]$. On pourra représenter les différents cas distingués dans un repère (n, u_n).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Suites numériques - 2021-2022

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. D'après les résultats usuels sur les polynomes en $+\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

Donc, les fonctions $\sqrt{\ }$ et ln étant continues, respectivement en 1 et en $\frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}} - \ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = 1-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1+\ln(2)$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers

$$\boxed{\ell = 1+\ln(2)}$$

2. D'après la première formule proposée à l'ordre 2, appliquée pour $h = \frac{3}{n}$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{3}{n}} &= \left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 1+\frac{1}{2}\times\frac{3}{n}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\times\frac{9}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1+\frac{3}{2n}-\frac{9}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après les formules du log, on a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) &= \ln(n+1)-\ln(2n-1)\\ &= \ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]-\ln\left[2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]\\ &= \cancel{\ln(n)}+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(2)-\cancel{\ln(n)}-\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

En appliquant alors la seconde formule proposée à l'ordre 2 appliquée pour $h = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2n}-\frac{3}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}u_n &= \left[1+\cancel{\frac{3}{2n}}-\frac{9}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\cancel{\frac{3}{2n}}-\frac{3}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\ &= 1+\ln(2)-\frac{3}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

et

$$|u_n-\ell| = \left|-\frac{3}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{4n^2}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. La fonction φ régissant l'évolution de la suite (u_n) est

$$\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2}x + 3$$

Son point fixe est l'unique solution de l'équation

$$\varphi(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 3 = x \iff x = 6$$

2. La suite (v_n) est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 6$$

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} - 6 &= \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$.

(b) Par définition, $v_0 = u_0 - 6$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = v_0.q^n = (u_0 - 6) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{u_0 - 6}{2^n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + 6 = \frac{u_0 - 6}{2^n} + 6$$

(c) De la forme explicite ci-dessus, on déduit que (u_n) converge et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 3 (Exercice ▲)

1. (a) On a $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc φ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(x) = \frac{2 \times (1 + x^2) - 2x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 + x)(1 - x)}{(1 + x^2)^2}$$

Le dénominateur étant ici strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $\varphi'(x)$ est donné par le signe du numérateur.

Par ailleurs, on a

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$$

D'où

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(c)

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x &\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = x\\ &\Leftrightarrow 2x = x(1+x^2)\\ &\Leftrightarrow x^3 - x = 0\\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow \boxed{x = -1 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = 1}\end{aligned}$$

La fonction φ admet donc pour points fixes

$$x_1^* = -1 < x_2^* = 0 < x_3^* = 1$$

2. (a) On raisonne ici par récurrence : on pose

$$\mathcal{P}_1(n) \,:\, 0 < u_n < 1$$

— Init. : par hypothèse, on a $u_0 \in]0,1[$ donc $\mathcal{P}_1(0)$ est vraie.

— Héréd. : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_1(n)$ est vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}_1(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$0 < u_n < 1$$

Or d'après le tableau de variation établi plus haut, la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$. Donc

$$\varphi(0) < \varphi(u_n) < \varphi(1) \quad \Rightarrow \quad 0 < u_{n+1} < 1$$

Autrement, $\mathcal{P}_1(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : la propriété $\mathcal{P}_1(n)$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La suite étant à termes strictement positifs, on peut étudier ici le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\cancel{u_n}} \times \frac{2\cancel{u_n}}{1+u_n^2} = \frac{2}{1+u_n^2} > 1 \text{ car } u_n < 1$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) étant croissante et majorée (par 1), elle converge.

(d) La suite (u_n) étant une suite récurrente autonome et convergente, elle converge vers un point fixe de φ. Étant positive et croissante, elle converge vers le point fixe duquel elle se rapproche, donc $\ell = 1$.

3. La suite $(v_n) = (-u_n)$ vérifie d'une part

$$v_0 = -u_0 \in]0, 1[$$

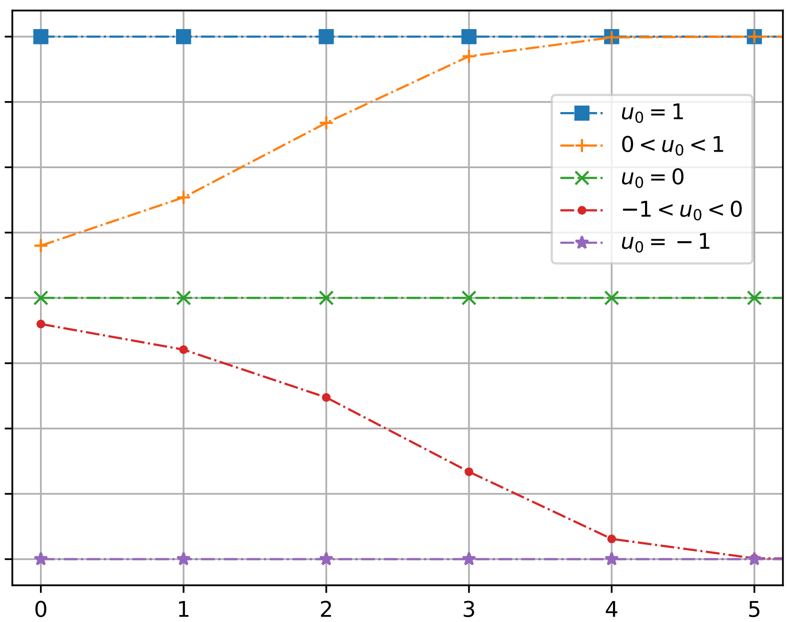
et d'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = -u_{n+1} = -\frac{2u_n}{1+u_n^2} = \frac{2\times(-u_n)}{1+(-u_n)^2} = \frac{2v_n}{1+v_n^2} = \varphi(v_n)$$

Ainsi, la suite $(v_n) = (-u_n)$ fait partie de l'ensemble des suites étudiées à la question 2.

Autrement dit, la suite $(-u_n)$ est croissante et converge vers 1. La suite (u_n) est donc décroissante et tend vers -1.

4. *Bilan* :
— Si $u_0 = -1$, la suite (u_n) est constante égale à -1.
— Si $-1 < u_0 < 0$, la suite (u_n) décroit vers -1.
— Si $u_0 = 0$, la suite (u_n) est constante égale à 0.
— Si $0 < u_0 < 1$, la suite (u_n) croit vers 1.
— Si $u_0 = 1$, la suite (u_n) est constante égale à 1.



⋆ ⋆
⋆