CONTRÔLE CONTINU

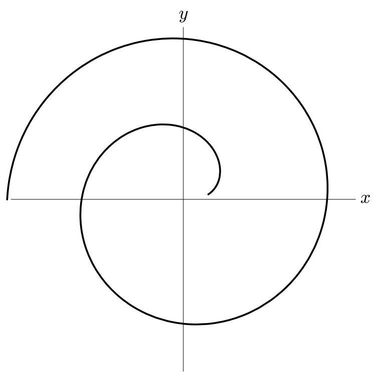
Systèmes différentiels, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

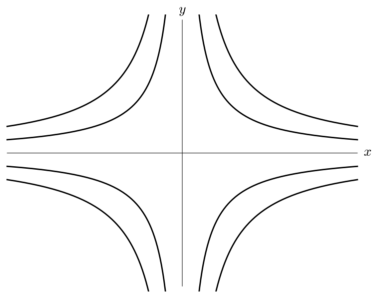
Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Associer chacune des matrices ci-dessous à l'un des portraits de phases suivant.

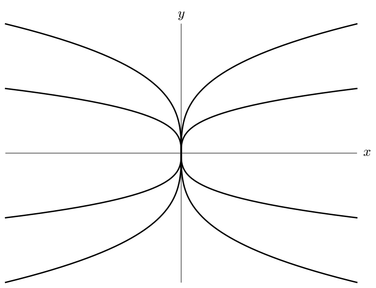
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & a^2+1 \end{pmatrix}, \quad a > 1$$



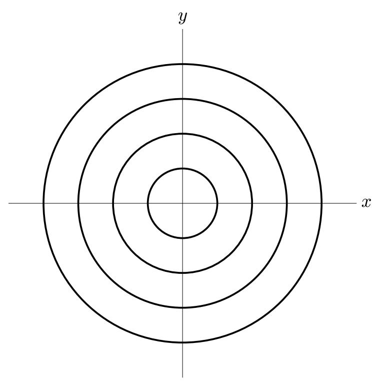
Portrait P_1



Portrait P_2



Portrait P_3



Portrait P_4

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & & & y & & \\ y' & = & & & & & z \\ z' & = & x & - & y & + & z \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associée à (S).
2. Montrer que les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

3. Déterminer un base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que chaque vecteur e_i engendre le sous espace propre E_i associé à la valeur propre λ_i.
4. En déduire une base complexe $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ de l'ensemble des solutions de (S).
5. Montrer que les fonctions

$$X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad X_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

forment également une base de l'ensemble des solutions de (S) (on pourra exprimer les fonctions X_i à l'aide des fonctions Y_i).
6. Donner l'ensemble des solutions de (S) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & ... \\ y(t) & = & ... \\ z(t) & = & ... \end{array} \right.$$

7. Soient $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer l'unique solution de (S) vérifiant la condition initiale

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

8. En considérant $(x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées à l'instant t d'un point matériel dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer l'ensemble des positions initiales correspondant, pour ce point, à une trajectoire bornée.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Théorie générale*

(a) Soit $(H) : X' = A(t)X$ un système différentiel linéaire homogène. Montrer que (H) vérifie le principe de superposition.

(b) Quelle propriété cela induit-il sur l'ensemble des solutions de (H) ?

(c) Soit $(S) : X' = A(t)X + F(t)$ un système différentiel linéaire quelconque. Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (S), la différence $Y_1 - Y_2$ est une solution du système (H) associé.

(d) Quelle propriété cela induit-il sur l'ensemble des solutions de (S) ?

2. Soit

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcl}(1+t^2)x' & = & tx+y+2t\\ (1+t^2)y' & = & -x+ty\end{array}\right.$$

(a) Déterminer une matrice $A(t)$ et un vecteur $F(t)$ tels que

$$(S) \iff X' = A(t)X + F(t)$$

(b) Montrer que les fonctions

$$X_1\ :\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_2\ :\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont du système homogène $(H)\ :\ X' = A(t)X$ associé à (S).

(c) Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas proportionnelles.

(d) En déduire l'ensemble des solutions de (H).

(e) Déterminer une solution particulière X_p de (S) sous la forme

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

(f) En déduire l'ensemble des solutions de (S).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

Pour déterminer le portrait de phase associé à chacune des matrices données, il faut calculer les valeurs propres de ces dernières. Ainsi,

1. $$\chi_1(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = (\lambda - a)(\lambda + a)$$

   Les valeurs propres de A_1 sont donc a et $-a$. Ce sont deux valeurs propres réelles de signes différents. La matrice A_1 correspond donc au portrait de phase P_2 (c'est un col).

2. $$\chi_2(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a^2 = (\lambda - ia)(\lambda + ia)$$

   Les valeurs propres de A_2 sont donc ia et $-ia$. Ce sont deux valeurs propres complexes de partie réelle nulle. La matrice A_2 correspond donc au portrait de phase P_4.

3. $$\chi_3(\lambda) = \det(A_3 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & a^2 + 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - a^2 - 1) + a^2 = \lambda^2 - (a^2 + 1)\lambda + a^2$$

   Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en λ dont le discriminant est

   $$\Delta = (a^2 + 1)^2 - 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2$$

   et dont les racines sont

   $$\lambda_1 = \frac{a^2 + 1 - |a^2 - 1|}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{a^2 + 1 + |a^2 - 1|}{2}$$

   Quitte à échanger λ_1 et λ_2, on peut supprimer les valeurs absolues et on obtient

   $$\lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = a^2$$

   Les valeurs propres de A_3 sont donc réelles et positives. La matrice A_3 correspond donc au portrait de phase P_3.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$$

$$= (1-\lambda)(1+\lambda^2) = (1-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i)$$

On retrouve bien les valeurs propres données.

3. Les trois valeurs propres étant différentes, chaque sous espace propre est une droite, dont on doit extraire un vecteur directeur. Ainsi :
   - E_1 :

$$AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & y \\ x - y + z & = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & y \end{array} \right.$$

   On peut choisir $e_1 = (1, 1, 1)$.

   - E_i :

$$AX = iX \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ix \\ z & = & iy \\ x - y + z & = & iz \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & ix \\ z & = & -x \end{array} \right.$$

   On peut choisir $e_2 = (1, i, -1)$.

   - E_{-i} :

$$AX = -iX \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -ix \\ z & = & -iy \\ x - y + z & = & -iz \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -ix \\ z & = & -x \end{array} \right.$$

   On peut choisir $e_3 = (1, -i, -1)$.

Note : on constate que $e_3 = \overline{e_2}$. C'est automatique puisque tous les coefficients de A sont réels. On aurait donc pu s'épargner le calcul de E_{-i}...

4. La base de solutions du système $(H)\ :\ X' = AX$ issue des calculs précédents est donnée par

$$Y_1 \ :\ t \longmapsto e^t.e_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$Y_2 \ :\ t \longmapsto e^{it}.e_2 = \begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \\ -e^{it} \end{pmatrix}$$

$$Y_3 \ :\ t \longmapsto e^{-it}.e_3 = \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \\ -e^{-it} \end{pmatrix}$$

5. Comme l'indique l'énoncé, il suffit d'exprimer les nouveaux vecteurs X_i en fonction des anciens Y_i. Il est clair tout d'abord que $X_1 = Y_1$. D'autre part, d'après les formules d'Euler, on a

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \\ \\ -\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ \\ -\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \\ -e^{it} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \\ -e^{-it} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(Y_1(t) + Y_2(t))$$

et

$$X_3(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ \\ \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \\ \\ -\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \\ -e^{it} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \\ -e^{-it} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2i}(Y_1(t) - Y_2(t))$$

La famille $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{X_1, X_2, X_3\}$ est donc une nouvelle base de l'ensemble des solutions de (H), formée de vecteurs réels.

Note : la matrice de $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2i \\ 0 & 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}$.

6. L'ensemble des solutions de (H) s'écrit donc comme combinaisons linéaires des X_i :

$$Y(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t).$$

Composante par composante, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x(t) = \alpha e^t & + & \beta\cos t & + & \gamma\sin t \\ y(t) = \alpha e^t & - & \beta\sin t & + & \gamma\cos t \\ z(t) = \alpha e^t & - & \beta\cos t & - & \gamma\sin t \end{array}\right.$$

7. Le problème se traduit par le système ci-dessous, dont les inconnues sont les coordonnées α, β, γ de Y :

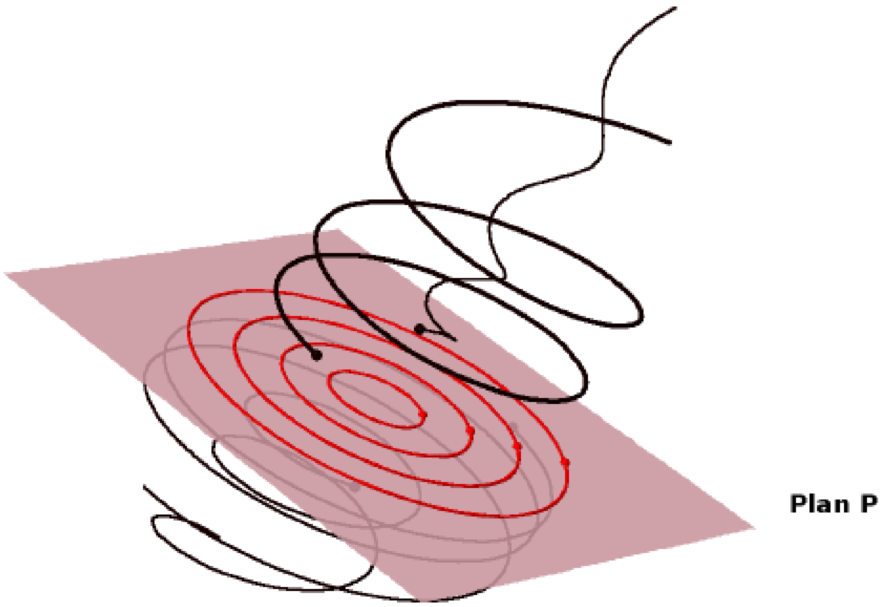
$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & x_0 \\ \alpha & + & \gamma & = & y_0 \\ \alpha & - & \beta & = & z_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & = & \dfrac{x_0+z_0}{2} & & \\ \beta & = & \dfrac{x_0-z_0}{2} & & \\ \gamma & = & y_0-\alpha & = & -\dfrac{x_0-2y_0+z_0}{2} \end{array}\right.$$

L'unique solution cherchée est obtenue en remplaçant α, β, γ dans la solution générale $Y(t)$ obtenue à la question précédente.

8. Dans chacune des composantes du vecteur $Y(t)$, seul le terme e^t n'est pas borné. La trajectoire sera donc bornée uniquement s'il n'apparaît pas dans l'expression de la solution. Il faut et il suffit donc que $\alpha = 0$. D'après le système précédent il faut donc que $\frac{x_0+z_0}{2} = 0$. Les points de départs possibles sont donc tous les points du plan d'équation

$$x + z = 0.$$

Ci dessous quelques trajectoires. Les courbes noires correspondent à des trajectoires ne partant pas du plan P d'équation $x + z = 0$, les rouges si.



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) Soient X_1 et X_2 deux solutions du système $X' = A(t)X$. Le calcul ci-dessous montre que la somme $X_0 = X_1 + X_2$ est encore une solution de (H) :

$$X_0' = (X_1 + X_2)' = X_1' + X_2' = A(t)X_1 + A(t)X_2 = A(t)(X_1 + X_2) = A(t)X_0.$$

   (b) D'un point de vue théorique, ce principe de superposition assure que l'ensemble des solutions de (H) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.

   (c) Soient Y_1 et Y_2 deux solutions de $X' = A(t)X + F(t)$. En posant $Y = Y_1 - Y_2$, on a

$$Y' = (Y_1 - Y_2)' = Y_1' - Y_2' = A(t)Y_1 + F(t) - (A(t)Y_2 + F(t) = A(t)(Y_1 - Y_2) = A(t)Y.$$

   La différence $Y_1 - Y_2$ est donc bien une solution de $(H)\,:\,X' = A(t)X$.

   (d) D'un point de vue théorique, cela assure que l'ensemble des solutions de (S) est un espace affine, dont la direction est l'ensemble des solutions du système (H) associé à (S). En pratique, cela implique que l'ensemble des solutions de (S) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (S) à l'ensemble des solutions de (H).

2. (a)

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{lcr} x' & = & \dfrac{t}{1+t^2}x + \dfrac{1}{1+t^2}y + \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \\ y' & = & -\dfrac{1}{1+t^2}x + \dfrac{t}{1+t^2}y \end{array}\right. \iff X' = A(t)X + F(t)$$

   avec

$$A(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

   (b) En calculant séparément $X_i'(t)$ et $A(t)X_i(t)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} X_1'(t) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A(t)X_1(t) & = & \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1-t^2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_1'(t) \end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{rcl} X_2'(t) & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A(t)X_2(t) & = & \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_2'(t) \end{array}$$

   (c) En observant les premières composantes des vecteurs $X_1(t)$ et $X_2(t)$, il est clair que l'on ne peut trouver de coefficient k constant tel que $X_1(t) = kX_2(t)$. Les deux vecteurs sont donc indépendants.

   (d) La théorie assure que le système (H) étant d'ordre 1 et de taille 2, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Les deux solutions X_1 et X_2 étant indépendantes, elles engendrent donc l'ensemble des solutions. Ainsi, l'ensemble de ces solutions est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$X_h(t) = \lambda X_1(t) + \mu X_2(t) = \begin{pmatrix} \lambda + \mu t \\ -\lambda t + \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(e) Soit $X_p\ :\ t \mapsto \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$. X_p est une solution de (S) si et seulement si ses coordonnées $x_p(t) = at+b$ et $y_p(t) = ct+d$ vérifient (S). D'où :

$$
\begin{aligned}
(S) &\iff \left\{ \begin{array}{rclclcl} (1+t^2)a &=& t(at+b) &+& (ct+d) &+& 2t \\ (1+t^2)c &=& -(at+b) &+& t(ct+d) && \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rclcl} a &=& (b+c+2)t &+& d \\ c &=& (-a+d)t &-& b \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcr} b+c &=& -2 \\ a-d &=& 0 \\ -a+d &=& 0 \\ b+d &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcr} a &=& d \\ b &=& -d \\ c &=& d-2 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

On peut donc prendre $d=0$ et $c=-2$. Ainsi, $X_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}$.

(f) L'ensemble des solutions de (S) est obtenu en additionnant la solution générale X_h déterminée plus haut et la solution particulière X_p déterminée à la question précédente :

$$
X(t) = X_h(t) + X_p(t) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) &=& \lambda + \mu t \\ y(t) &=& -(\lambda+2)t + \mu \end{array} \right.
$$