CONTRÔLE CONTINU

Systèmes différentiels, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.
Le barème indiqué est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 (6 points)

1. Soient $a \geqslant 0$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ et $(S_A)\ :\ Y' = AY$.
   (a) Montrer que A admet deux les valeurs propres réelles à déterminer en fonction de a.
   (b) Montrer que les sous espaces propres de A ne dépendent pas de a.
   (c) Tracer une esquisse des différents portraits de phase possibles de (S_A) autour de $(0,0)$ en fonction de a.
2. Soient $b \in \mathbb{R}$, $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ et $(S_B)\ :\ Y' = BY$.
   (a) Montrer que B admet deux valeurs propres complexes conjuguées à déterminer en fonction de b.
   (b) Tracer une esquisse des différents portraits de phase possibles de (S_B) autour de $(0,0)$ en fonction de b.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 (9 points)

1. Soient

$$(S)\ :\ \begin{cases} x' = -3x + 2y - z \\ y' = -y \\ z' = 2x - z \end{cases}$$

   et A la matrice du système (S).
   (a) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
   (b) Montrer que les fonctions vectorielles

$$Y_1\ :\ t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ Y_2\ :\ t \mapsto e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix},\ Y_3\ :\ t \mapsto e^{-2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

forme une base de l'ensemble des solutions de (S) et donner la solution générale de (S) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & ... \\ y(t) & = & ... \\ z(t) & = & ... \end{array}\right.$$

(c) Déterminer l'unique solution de (S) passant à $t = 0$ par le point (x_0, y_0, z_0).

(d) Montrer qu'il existe un plan P de l'espace tel que si $(x_0, y_0, z_0) \in P$, alors le point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t)) \in P$ quelque soit t.

(e) Décrire les différentes trajectoires possible pour le système (S).

2. On ajoute ici un second membre $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ 2t+2 \end{pmatrix}$ pour obtenir le système

$$(\tilde{S}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x' & = & -3x & + & 2y & - & z & & \\ y' & = & & - & y & & & + & t+1 \\ z' & = & 2x & & & - & z & + & 2t+2 \end{array}\right.$$

(a) Montrer que la fonction vectorielle $Y_p : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$ est une solution de $(\tilde{S})$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de $(\tilde{S})$.

(c) Déterminer l'unique solution de $(\tilde{S})$ passant par le point $(0, 0, 0)$ à $t = 0$.

(d) Décrire la trajectoire associée à cette condition initiale.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 (5 points)

Soient $a, b > 0$ et

$$(S) : \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x(y-b) \\ y' & = & y(a-x) \end{array}\right.$$

1. Déterminer le champ de vecteur $F = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ associé à (S) et calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(F)(x, y)$.
2. Montrer que les deux points fixes de (S) sont

$$P_1 = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad P_2 = (a, b)$$

et calculer les matrices $J_1 = \mathrm{Jac}(F)(P_1)$ et $J_2 = \mathrm{Jac}(F)(P_2)$ associées.

3. Tracer quelques trajectoires du portrait de phase (on prendra soin de faire apparaître les deux points fixes sur le même dessin).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a)

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - 1 = (a-1-\lambda)(a+1-\lambda)$$

D'où $\mathrm{Spec}(A) = \{a-1, a+1\}$.

(b) – $\underline{E_{a-1}}$:

$$AX = (a-1)X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & y & = & (a-1)x \\ x & + & ay & = & (a-1)y \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x$$

E_{a-1} est donc la droite d'équation $y = -x$ quelque soit $a \geqslant 0$.

– $\underline{E_{a+1}}$:

$$AX = (a+1)X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & y & = & (a+1)x \\ x & + & ay & = & (a+1)y \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x$$

E_{a+1} est donc la droite d'équation $y = x$ quelque soit $a \geqslant 0$.

(c) La forme des trajectoires autour de $(0,0)$ dépend du signe des valeurs propres. $a+1$ étant toujours positif, la nature du point fixe dépend donc du signe de $a-1$. Ainsi,

...

2. (a)

$$\det(B-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} b-\lambda & 1 \\ -1 & b-\lambda \end{vmatrix} = (b-\lambda)^2 + 1 = (b-i-\lambda)(b+i-\lambda)$$

Les valeurs propres de B sont donc les deux nombres complexes conjugués $\lambda_1 = b+i$ et $\lambda_1 = b-i = \overline{\lambda_1}$.

(b) La forme des trajectoires du portrait de phase de (S_B) dépend alors du signe de la partie réelle de ces valeurs propres. Ainsi,

...

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La matrice A du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) On calcule le polynôme caractéristique de A en développant le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$ par rapport à la deuxième colonne :

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda+1)\left[(3+\lambda)(1+\lambda)+2\right] = (\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5)$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda+2-i)(\lambda+2+i)$$

D'où $\mathrm{Spec}(A) = \{-1, -2+i, -2-i\}$.

On détermine ensuite les différents sous espaces propres en résolvant, pour chaque valeur propre λ du spectre, le système linéaire $AX = \lambda X$. Ainsi,

- $\underline{E_{-1}}$:

$$AX = -X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 2y & - & z & = & -x \\ & - & y & & & = & -y \\ 2x & & & - & z & = & -z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & & & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 2y \end{array}\right.$$

E_{-1} est donc la droite de l'espace dont les vecteurs sont de la forme $(0, y, 2y)$ pour $y \in \mathbb{R}$. Un vecteur directeur de cette droite est par exemple $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- $\underline{E_{-2+i}}$:

$$AX = (-2+i)X \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 2y & - & z & = & (-2+i)x \\ & - & y & & & = & (-2+i)y \\ 2x & & & - & z & = & (-2+i)z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} (-1-i)x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & (1-i)y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & (1-i)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & -(1+i)x \end{array}\right.$$

E_{-2+i} est donc la droite de l'espace dont les vecteurs sont de la forme $(x, 0, -(1+i)x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Un vecteur directeur de cette droite est par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(1+i) \end{pmatrix}$.

- $\underline{E_{-2-i}}$: les valeurs propres complexes étant conjuguées et les coefficients de A étant réels, les vecteurs propres associée à ces deux valeurs propres complexes sont également conjugués. Ainsi, les vecteurs propres de E_{-2-i} sont les vecteurs de la forme $(x, 0, -(1-i)x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et un vecteur directeur de cette droite est par exemple $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(1-i) \end{pmatrix}$.

(b) On peut construire une base de solutions de (S) à partir des calculs faits à la question précédente. Ainsi,

- La valeur propre $\lambda_1 = 1$ produit la solution $Y_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t} X_1$ proposée par l'énoncé.
- La valeur propre $\lambda_2 = -2+i$ produit deux solutions en isolant la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{\lambda_2 t} X_2$. Or

$$e^{\lambda_2 t} X_2 = e^{(-2+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(1+i) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ 0 \\ -(1+i)(\cos(t) + i\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ -\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + ie^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ -\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

On retrouve, dans la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{\lambda_2 t} X_2$ les fonctions Y_2 et Y_3 proposées par l'énoncé.

Les solutions de (S) sont donc les fonctions vectorielles Y de la forme

$$Y(t) = aY_1(t) + bY_2(t) + cY_3(t), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$= ae^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + be^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ -\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + ce^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \\ -\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & be^{-2t}\cos(t) + ce^{-2t}\sin(t) \\ y(t) & = & ae^{-t} \\ z(t) & = & 2ae^{-t} + be^{-2t}(-\cos(t) + \sin(t)) - ce^{-2t}(\cos(t) + \sin(t)) \end{array} \right.$$

(c) L'unique solution correspondant à la condition initiale $\left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & x_0 \\ y(0) & = & y_0 \\ z(0) & = & z_0 \end{array} \right.$ est donnée par le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & b & & & = & x_0 \\ a & & & & & = & y_0 \\ 2a & - & b & - & c & = & z_0 \end{array} \right.$$

d'inconnues (a, b, c), obtenu en posant $t = 0$ dans la solution générique (Σ). La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} a &= y_0 \\ b &= x_0 \\ c &= 2a - b - z_0 = -x_0 + 2y_0 - z_0 \end{cases}$$

D'où :

$$(\Sigma_0) : \begin{cases} x(t) &= (x_0 \cos(t) + (-x_0 + 2y_0 - z_0)\sin(t))e^{-2t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \\ z(t) &= 2y_0 e^{-t} - ((2y_0 - z_0)\cos(t) - (2x_0 - 2y_0 + z_0)\sin(t))e^{-2t} \end{cases}$$

(d) D'après l'étude ci dessus, on constate que si $y_0 = 0$, alors $y(t) = y_0 e^{-t} = 0$ quelque soit t. Le plan d'équation $y = 0$ répond donc à la question posée.

(e) Les valeurs propres complexes étant de partie réelles négatives, elles induisent pour chacune des trajectoire, un composante en spirale contractante. Par ailleurs, la valeur propre réelle de A étant négative, toutes les trajectoires convergent vers 0 en une spirale. Cette dernière est plane si le point de départ est dans le plan $y = 0$.

2. (a) Si $Y_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$, alors $Y_p'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, si

$$\begin{cases} x_p(t) &= 0 \\ y_p(t) &= t \\ z_p(t) &= 2t \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} -3x_p(t) + 2y_p(t) - z_p(t) &= 2t - 2t &= 0 &= x_p'(t) \\ -y_p(t) + t + 1 &= -t + t + 1 &= 1 &= y_p'(t) \\ 2x_p(t) - z_p(t) + 2t + 2 &= -2t + 2t + 2 &= 2 &= z_p'(t) \end{cases}$$

La fonction vectorielle Y_p est donc bien une solution de $(\tilde{S})$.

(b) Le système $(\tilde{S})$ étant linéaire, non homogène, l'ensemble de ses solutions s'obtient en ajoutant une solution particulières de $(\tilde{S})$ (par exemple Y_p) à la solution générique du système homogène associé (qui ici est (S)). Ainsi, l'ensemble des solutions de $(\tilde{S})$ est

$$(\tilde{\Sigma}) : \begin{cases} x(t) &= be^{-2t}\cos(t) + ce^{-2t}\sin(t) \\ y(t) &= ae^{-t} + t \\ z(t) &= 2ae^{-t} + be^{-2t}(-\cos(t) + \sin(t)) - ce^{-2t}(\cos(t) + \sin(t)) + 2t \end{cases}$$

pour $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) En posant $t = 0$ dans le système précédent, on obtient

$$\begin{cases} 0 &= b \\ 0 &= a \\ 0 &= 2a - b - c \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

L'unique solution cherchée est donc Y_p.

(d) Cette solution Y_p vérifie pour tout t les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 0 \\ z(t) & = & 2y(t) \end{array}\right.$$

La trajectoire se situe donc sur la droite intersection des plans $x = 0$ et $z = 2y$. Il s'agit donc d'une trajectoire rectiligne, partant du centre du repère, et partant vers les $y > 0$ et $z > 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On a $F(x, y) = (x(y - b), y(a - x))$, d'où

$$f_1(x, y) = x(y - b) = xy - bx \qquad \text{et} \qquad f_2(x, y) = y(a - x) = ay - xy$$

Les coefficients de la matrice jacobienne de F étant les dérivées partielles de f_1 et f_2, on a

$$\begin{array}{rclrcl} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & = & y - b & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) & = & x \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & = & -y & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) & = & a - x \end{array}$$

et

$$\mathrm{Jac}(F)(x, y) = \begin{pmatrix} y - b & x \\ -y & a - x \end{pmatrix}$$

2. Les points fixes de (S) sont les couples (x, y) tels que $F(x, y) = (0, 0)$. D'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(x - a) & = & 0 \\ x(b - y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ bx & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x - a & = & 0 \\ a(b - y) & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ y & = & b \end{array}\right.$$

(S) admet donc pour points fixes les deux points

$$P_1 = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad P_2 = (a, b)$$

D'après les calculs précédents, on a

$$J_1 = \mathrm{Jac}(F)(0, 0) = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_2 = \mathrm{Jac}(F)(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$