# CONTRÔLE CONTINU

Systèmes différentiels, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

**Exercice 1** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. On note $(S)$ : $Y' = AY$ le système différentiel d'ordre 1, linéaire, homogène, à coefficients constants associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A$.
2. En justifiant ses choix, associer à chacun des cas suivant l'un des portraits de phases donnés en annexe 1.

$$A) \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right. \quad B) \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right. \quad C) \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right. \quad D) \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \quad E) \left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** Soit

$$(\Sigma) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & x - 4y \\ y'' & = & -x + y \end{array} \right.$$

1. Donner le type du système $(\Sigma)$.
2. Montrer que le système $(\Sigma)$ est équivalent au système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcr} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_1 - 4y_3 \\ y_3' & = & y_4 \\ y_4' & = & -y_1 + y_3 \end{array} \right.$$

On notera $A$ la matrice du système $(S)$.

3. Montrer que $\text{Spec}(A) = \{\pm i, \pm\sqrt{3}\}$ et donner un vecteur directeur pour chacun des sous espaces propres de $A$.
4. En déduire une base de solutions *réelles* pour le système $(S)$ et donner l'ensemble des solutions de $(S)$ sous forme matricielle.
5. En déduire l'ensemble des solutions du système $\Sigma$. On donner cette solution sous la forme $\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & ... \\ y(t) & = & ... \end{array} \right.$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** Soit

$$(S) \; : \left\{ \begin{array}{lcr} x' & = & (x^2-1)y \\ y' & = & (x+2)(y-1) \end{array} \right.$$

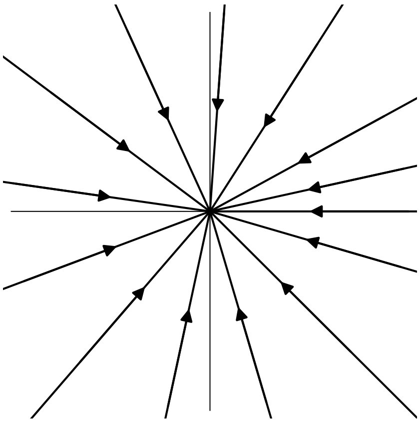
1. Donner le type du système $(S)$ et donner explicitement le champ de vecteurs $F$ qui lui est associé.
2. Montrer que les points fixes de $(S)$ sont

$$P_1 = (-2, 0), \quad P_2 = (1, 1), \quad P_3 = (-1, 1)$$

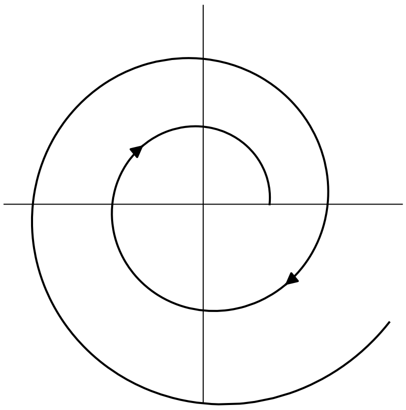
3. Déterminer, pour tout couple $(x, y)$, la matrice jacobienne $\text{Jac}(F)(x, y)$ et en déduire les matrices $J_i = \text{Jac}(F)(P_i)$ pour chacun des points fixes $P_i$ de $(S)$.
4. Parmi les portraits de phases donnés en annexe 2, déterminer celui correspondant au système différentiel $(S)$ (justifier).

⋆ ⋆
⋆

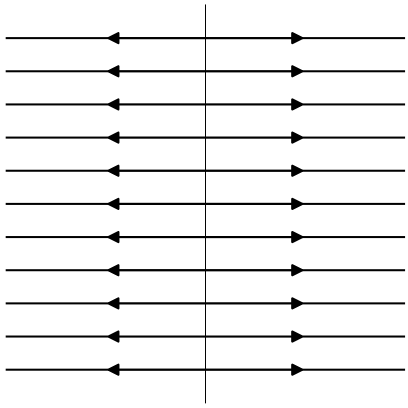
# ANNEXE I



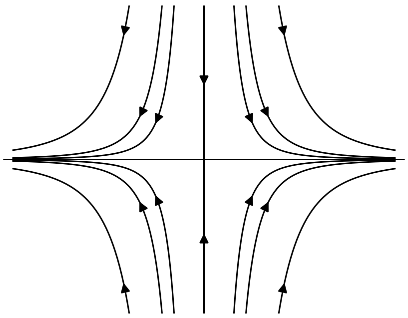
I



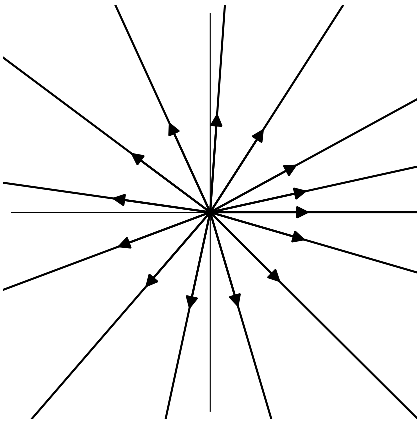
II



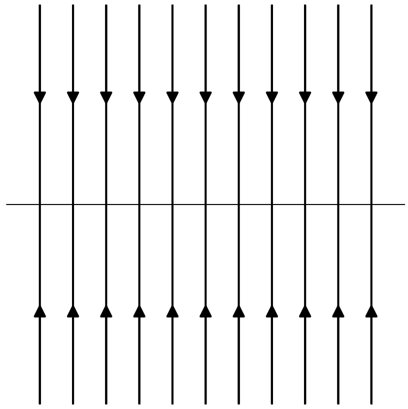
III



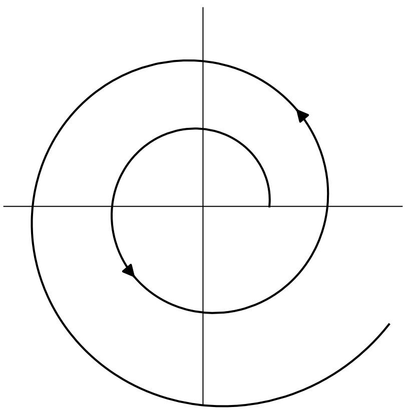
IV



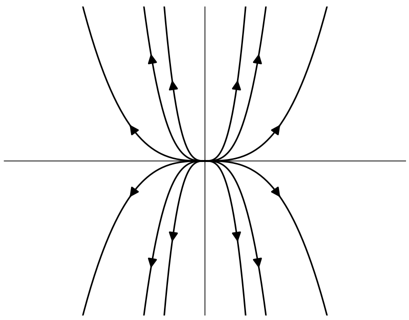
V



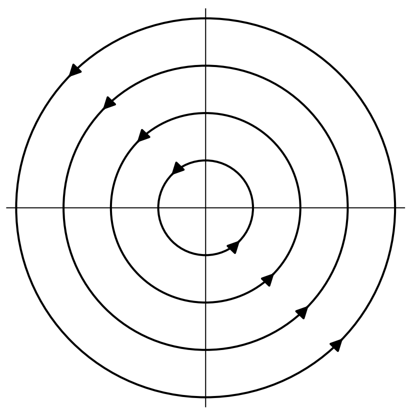
VI



VII

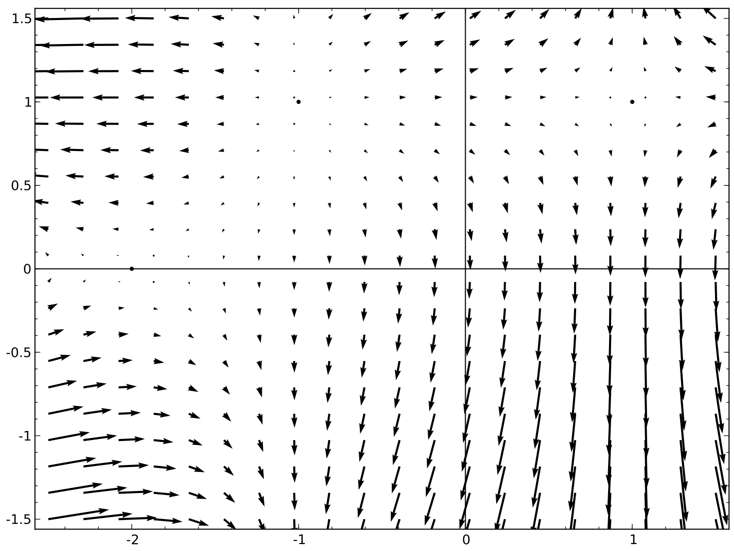


VIII

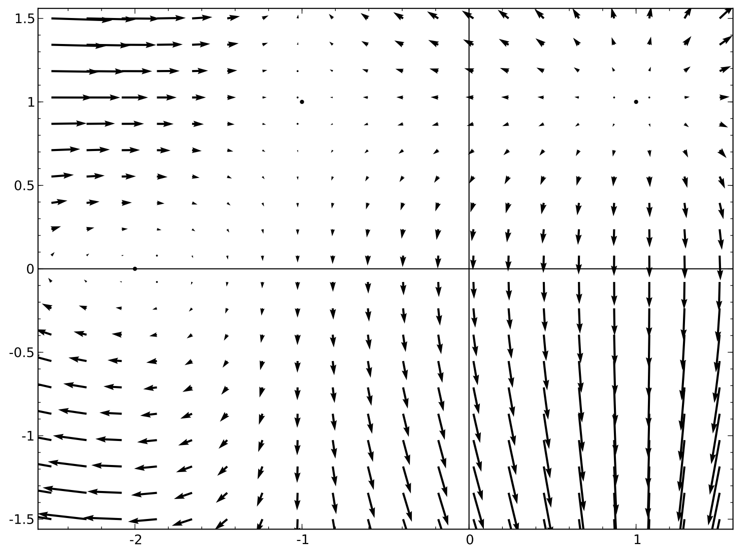


IX

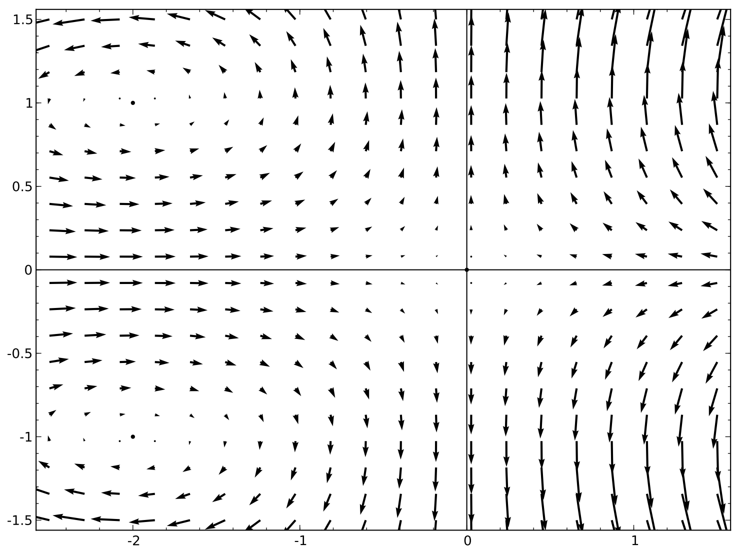
# ANNEXE 2



A)



B)



C)

# CORRECTION

**Exercice 1** :

1. $$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b = (a+ib-\lambda)(a-ib-\lambda)$$

   D'où $\mathrm{Spec}(A) = \{a \pm ib\}$.

2. Si $b \neq 0$, les valeurs propres de $A$ sont donc complexes. Les trajectoires du portrait de phase de $(S)$ sont alors des spirales dont l'évolution dépend du signe de $a$. Précisément :

   – Si $a > 0$, les spirales s'étendent, d'où $A \leftrightarrow$ VII.
   – Si $a = 0$, les spirales sont des cercles, d'où $B \leftrightarrow$ IX.
   – Si $a < 0$, les spirales se contractent, d'où $C \leftrightarrow$ II.

   Si $b = 0$, on a $A = a.I_3$. Dans ce cas, le système $(S)$ est $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax \\ y' & = & ay \end{array}\right.$. On a alors $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & x(0)e^{at} \\ y(t) & = & y(0)e^{at} \end{array}\right.$.

   On constate en particulier que $x(t)$ et $y(t)$ sont proportionnels entre eux. Les trajectoires de ce système sont donc des droites linéaires dont le sens de parcours dépend du signe de $a$. Précisément :

   – Si $a > 0$, on a $x(t)$ et $y(t) \rightarrow \pm\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc $D \leftrightarrow$ V.
   – Si $a < 0$, on a $x(t)$ et $y(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc $E \leftrightarrow$ I.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 2** :

1. Il s'agit d'un système différentiel linéaire, d'ordre 2, homogène, à coefficients constants.
2. On obtient le système $(S)$ en posant

   $$y_1 = x, \quad y_2 = x', \quad y_3 = y, \quad y_4 = y'$$

   On a alors

   $$\left\{\begin{array}{lclclcl} y_1' & = & x' & = & y_2 & & \\ y_2' & = & x'' & = & x - 4y & = & y_1 - 4y_3 \\ y_3' & = & y' & = & y_4 & & \\ y_4' & = & y'' & = & -x + y & = & -y_1 + y_3 \end{array}\right.$$

On obtient le système linéaire souhaité, associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres de $A$ sont les racines de

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Or

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3$$

Ainsi,

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 + 3) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - 3$$

En posant $X = y^2$, on transforme le polynôme $\chi_A(\lambda)$ en $P(X) = X^2 - 2X - 3$ dont le discriminant est

$$\Delta = (-2)^2 + 4 \times 3 = 16$$

et dont les racines sont $X_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1$ et $3$.
Ainsi, $P(X) = (X + 1)(X - 3)$ et

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 3) = (\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3})$$

Le spectre de $A$ est donc bine $\mathrm{Spec}(A) = \{\pm i,\ \pm\sqrt{3}\}$.

Une fois obtenues les valeurs propres, on détermine les sous espaces propres. Ici, puisque l'on a quatre valeurs propres distinctes, chaque sous espace propre est de dimension 1. Chaque système $AX = \lambda X$ à résoudre est donc de rang 3 et l'ensemble des solutions s'exprime à l'aide d'un seul des quatre paramètres.

- $\underline{E_i}$ :

$$AX = iX \iff (A - iI_3)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -iy_1 & + & y_2 & & & & & = & 0 \\ y_1 & - & iy_2 & - & 4y_3 & & & = & 0 \\ & & & - & iy_3 & + & y_4 & = & 0 \\ -y_1 & & & + & y_3 & - & iy_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} y_2 & = & iy_1 & & \\ y_3 & = & \frac{1}{4}(y_1 - iy_2) & = & \frac{1}{2}y_1 \\ y_4 & = & iy_3 & = & \frac{i}{2}y_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, $E_i$ est engendré par le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$.

- $\underline{E_{-i}}$ : le problème étant à valeurs réelles, on a $E_{-i} = \overline{E_i}$ est engendré par $X_2 = \overline{X_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

- $\underline{E_{\sqrt{3}}}$ :

$$\begin{aligned} AX = \sqrt{3}X &\iff (A - \sqrt{3}I_3)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -\sqrt{3}y_1 & + & y_2 & & & & & = & 0 \\ y_1 & - & \sqrt{3}y_2 & - & 4y_3 & & & = & 0 \\ & & & - & \sqrt{3}y_3 & + & y_4 & = & 0 \\ -y_1 & & & + & y_3 & - & \sqrt{3}y_4 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} y_2 & = & \sqrt{3}y_1 & & \\ y_3 & = & \frac{1}{4}(y_1 - \sqrt{3}y_2) & = & -\frac{1}{2}y_1 \\ y_4 & = & \sqrt{3}y_3 & = & -\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, $E_{\sqrt{3}}$ est engendré par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

– $\underline{E_{-\sqrt{3}}}$ :

$$AX = -\sqrt{3}X \Longleftrightarrow (A+\sqrt{3}I_3)X = 0$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \sqrt{3}y_1 & + & y_2 & & & & & = & 0 \\ y_1 & + & \sqrt{3}y_2 & - & 4y_3 & & & = & 0 \\ & & & & \sqrt{3}y_3 & + & y_4 & = & 0 \\ -y_1 & & & + & y_3 & + & \sqrt{3}y_4 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} y_2 & = & -\sqrt{3}y_1 & & \\ y_3 & = & \frac{1}{4}(y_1+\sqrt{3}y_2) & = & -\frac{1}{2}y_1 \\ y_4 & = & -\sqrt{3}y_3 & = & \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $E_{-\sqrt{3}}$ est engendré par le vecteur $X_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

4. Chaque valeur propre, associée à son vecteur propre produit une solution de base pour le système $(S)$ :

$$Z_1(t) = e^{it}X_1, \quad Z_2(t) = e^{-it}X_2, \quad Y_3(t) = e^{\sqrt{3}t}X_3, \quad Y_4(t) = e^{-\sqrt{3}t}X_4$$

Cependant, pour avoir une base de solutions réelles, il faut prendre la partie réelle et la partie imaginaire de la solution $Z_1$ :

$$Z_1(t) = e^{it}X_1 = \begin{pmatrix} 2e^{it} \\ 2ie^{it} \\ e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + 2i\sin t \\ -2\sin t + 2i\cos t \\ \cos t + i\sin t \\ -\sin t + i\cos t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi deux solutions de base pour le système $(S)$ :

$$Y_1 \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_2 \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

que l'on complète avec

$$Y_3 \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{\sqrt{3}t} \\ 2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t} \\ -\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_4 \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-\sqrt{3}t} \\ -2\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{-\sqrt{3}t} \\ \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$$

En notant $M(t)$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $Y_1(t)$ à $Y_4(t)$, on obtient l'ensemble des solutions de $(S)$ sous la forme

$$Y(t) = M(t) \times C, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

soit

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t & 2e^{\sqrt{3}t} & 2e^{-\sqrt{3}t} \\ -2\sin t & 2\cos t & 2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} & -2\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} \\ \cos t & \sin t & -e^{\sqrt{3}t} & -e^{-\sqrt{3}t} \\ -\sin t & \cos t & -\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t} & \sqrt{3}e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

5. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système $\Sigma$ correspondent aux coordonnées $y_1(t)$ et $y_3(t)$ du vecteur $Y(t)$ ci-dessus. Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rclclclcl} x(t) & = & 2\alpha\cos(t) & + & 2\beta\sin t & + & 2\gamma e^{\sqrt{3}t} & + & 2\delta e^{-\sqrt{3}t} \\ y(t) & = & \alpha\cos(t) & + & \beta\sin t & - & \gamma e^{\sqrt{3}t} & - & \delta e^{-\sqrt{3}t} \end{array} \right. , \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

**Exercice 3** :

1. Il s'agit d'un système autonome d'ordre de la forme $Y' = F(Y)$ avec

$$F(x, y) = \big((x^2 - 1)y, (x + 2)(y - 1)\big) = (x^2y - y, xy - x + 2y - 2)$$

2. Les points fixes du système $(S)$ sont par définition l'ensemble des couples $(x, y)$ tels que $F(x, y) = (0, 0)$. Or

$$F(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (x^2 - 1)y & = & 0 \\ (x + 2)(y - 1) & = & 0 \end{array} \right.$$

D'après la seconde équation, on a donc

$$\begin{aligned} F(x, y) = (0, 0) &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ 3y & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & 1 \\ x^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & 1 \\ x & = & -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On retrouve donc les points fixes annoncés.

3. En notant $f_1$ et $f_2$ les fonctions coordonnées du champ de vecteurs $F$, on a

$$\mathrm{Jac}(F)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2-1 \\ y-1 & x+2 \end{pmatrix}$$

   Ainsi,

$$J_1 = \mathrm{Jac}(F)(-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \mathrm{Jac}(F)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \mathrm{Jac}(F)(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Le portrait de phase de $(S)$ autour des points fixes dépend des valeurs propres de chacune des matrices $J_i$. Or

   - $\chi_{J_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3 = (\lambda - i\sqrt{3})(\lambda + i\sqrt{3})$. Les trajectoires autour du point $P_1$ sont circulaires.

   - Les valeurs propres de $J_2$ sont clairement 2 et 3. Elles sont donc toutes deux positives et le point $P_2$ est donc un nœud répulsif.

   - Les valeurs propres de $J_3$ sont clairement $-2$ et 1. Elles sont donc de signes différents et $P_3$ est un col.

   Le champ de vecteur correspondant à ces observations est donc le champ $B$.