CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Tous les résultats devront être justifiés.

Exercice 1 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$(\mathcal{S}_\lambda) : \left\{ \begin{array}{ll} x - \lambda y + \lambda^2 z & = 0 \\ -\lambda x + y - \lambda z & = 0 \\ \lambda^2 x - \lambda y + z & = 0 \end{array} \right.$$

et on note A_λ la matrice de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

1. Calculer $\det(A_\lambda)$.
2. En déduire que A_λ est inversible si et seulement si $\lambda \neq \pm 1$.
3. Résoudre $\mathcal{S}_\lambda$ pour $\lambda \neq \pm 1$.
4. On pose ici $\lambda = 1$.
   (a) Déterminer le rang de A_1.
   (b) Donner une base de l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}_1$.
5. Même chose dans le cas $\lambda = -1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la décomposition LU de A.
2. Donner sans calcul l'inverse P^{-1} de la matrice de permutation P telle que $PA = LU$. (Justifier).
3. Déterminer les matrices L^{-1} et U^{-1} puis A^{-1}.
4. À l'aide de la décomposition LU trouvée plus haut, résoudre le système

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

   et retrouver le résultat de la question précédente.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 *Trajectoire d'une exo-planète.*

La sonde Galilée nous permet d'observer une planète située à l'extérieur du système solaire. Elle nous renvoie différentes positions données par les coordonnées ci dessous :

x	y	z
1.2	1	−1.1
2.8	2	−2.4
1.2	−2.2	0.5
4	0.2	−2.1
0.4	0	−0.2
3.6	−0.4	−1.6

On souhaite alors déterminer l'équation de la trajectoire cette planète autour de son soleil.

Dans tout l'exercice, on travaillera avec une précision de 10^{-1}.

1. *Plan de la trajectoire.*
   (a) Déterminer l'équation
   $$z = ax + by + c$$
   du plan $\mathcal{P}$ de l'espace passant au plus près de chacune des positions relevées par la sonde.
   (b) Montrer que ce plan est engendré par les vecteurs
   $$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (c) Compléter la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ à l'aide d'un troisième vecteur $\vec{v_3}$ orthogonal aux deux premiers.
   (d) On admettra que dans la base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, les positions relevées ont pour coordonnées les valeurs suivantes :

X	Y	Z
1.1	−0.1	0
2.4	−0.4	0
−0.5	−1.7	0
2.1	−1.9	0
0.2	−0.2	0
1.6	−2	0

   Comment interpréter la dernière colonne du tableau ci-dessus ?

2. *Trajectoire elliptique.*
   On se place maintenant dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.
   (a) Centrer les variables X et Y ci dessus et tracer le nuage de points obtenu. (On notera encore X et Y les variables centrées).
   (b) Déterminer par la méthode des moindre carrés l'équation
   $$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$$
   de l'ellipse donnant la trajectoire de la planète. (On admettra que les droites d'équations $X = 0$ et $Y = 0$ donnent les axes principaux de l'ellipse cherchée).
   (c) *(Facultatif).* Quelles sont les positions possibles de l'étoile autour de laquelle tourne cette planète ?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1

1. $$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ -\lambda & 1 & -\lambda \\ \lambda^2 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

   On calcule $\det(A_\lambda)$ en vidant la première colonne :

   $$\begin{aligned}
   \det(A_\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda^3-\lambda \\ 0 & \lambda^3-\lambda & 1-\lambda^4 \end{vmatrix} \\
   &= \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & \lambda^3-\lambda \\ \lambda^3-\lambda & 1-\lambda^4 \end{vmatrix} \\
   &= (1-\lambda^2)(1-\lambda^4) - (\lambda^3-\lambda)^2 \\
   &= (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2(1+\lambda^2) - \lambda^2(1-\lambda)^2(1+\lambda)^2 \\
   &= (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2
   \end{aligned}$$

2. Les racines de $\det(A_\lambda)$ sont $\lambda = \pm 1$. Hors de ces valeurs, la matrice A_λ est inversible.
3. Pour $\lambda \neq \pm 1$, le système (S_λ) est un système homogène inversible. Il admet donc le vecteur nul comme unique solution.

4. $\underline{\lambda = 1}$

   (a) $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Puisque $\det(A_1) = 0$, on a $\mathrm{rg}(A_1) < 3$. Pour déterminer précisément ce rang, on effectue le pivot de Gauss sur A_1 :

   $$A_1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On en déduit $\mathrm{rg}(A_1) = 1$.

   (b) D'après le calcul précédent, l'ensemble Σ_1 des solutions de (S_1) est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation

   $$x - y + z = 0 \iff x = y - z$$

   D'où

   $$\Sigma_1 = \{(y-z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}$$

   dont une base est formée des vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (-1,0,1)$.

5. $\underline{\lambda = -1}$

   (a) $$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$A_{-1} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Là encore, on en déduit $\mathrm{rg}(A_{-1}) = 1$.

(b) Comme plus haut, l'ensemble Σ_{-1} des solutions de (S_{-1}) est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x + y + z = 0 \iff x = -y - z$$

D'où

$$\Sigma_{-1} = \{(-y-z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\}$$

dont une base est formée des vecteurs $\varepsilon_1 = (-1, 1, 0)$ et $e_2 = (-1, 0, 1)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1.

Opérations	A	L	P
	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftrightarrow L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftrightarrow L_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
	U	L	P

2. Les deux permutations effecutées au cours du calcul sont deux permutations indépendantes (elles ne portent pas sur les mêmes lignes). Pour tout remettre en place, il suffit donc d'effectuer à nouveau ces mêmes permutations. Autrement dit, $P^{-1} = P$.

3. Au vu de la forme de L et U, on peut calculer les inverses demandés à l'aide de la méthode consistant à ramener ces matrices à la matrice identité via des opérations de lignes :

   – Calcul de L^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   D'où $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

– Calcul de U^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_4 \leftarrow -L_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

D'où $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De l'égalité $PA = LU$, on tire alors $A = P^{-1}LU$ puis $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P$. D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. D'après les calculs effectués aux questions précédentes, on peut remplacer le système proposé par les deux systèmes $LY = P \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ puis $UX = Y$:

$$\begin{aligned} LY = P \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & \Longleftrightarrow L \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = L^{-1} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & b \\ y & = & a \\ z & = & d \\ t & = & a + c \end{array} \right. \end{aligned}$$

D'où $Y_0 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ a+c \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} UX = Y_0 & \Longleftrightarrow L \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ a+c \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = U^{-1} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ a+c \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & b + d \\ y & = & -a \\ z & = & d \\ t & = & -a - c \end{array} \right. \end{aligned}$$

En extrayant les coefficients du dernier système, on retrouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. (a) Le problème se traduit par le système sur-déterminé $AX = B$ dont les matrices sont

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 1 & 1 \\ 2.8 & 2 & 1 \\ 1.2 & -2.2 & 1 \\ 4 & 0.2 & 1 \\ 0.4 & 0 & 1 \\ 3.6 & -0.4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1.1 \\ -2.4 \\ 0.5 \\ -2.1 \\ -0.2 \\ -1.6 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un système sur-déterminé dont la meilleure solution est donnée par le système des équations normales ${}^tAAX = {}^tAB$. Or :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 39.84 & 3.52 & 13.2 \\ 3.52 & 10.04 & 0.6 \\ 13.2 & 0.6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} -21.68 \\ -6.78 \\ -6.9 \end{pmatrix}$$

La résolution du système normal donne alors

$$\begin{cases} a &= -0.5 \\ b &= -0.5 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Le plan $\mathcal{P}$ cherché est donc le plan d'équation $z = -0.5x - 0.5y \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$.

(b) On vérifie rapidement que les deux vecteurs proposés sont bien dans le plan trouvé ci-dessus. De plus, la présence du 0 dans v_2 assure que ces deux vecteurs sont indépendants. Il s'agit donc bien d'une base de $\mathcal{P}$.

(c) Pour construire un vecteur orthogonal à v_1 et v_2, on utilise le produit vectoriel :

$$v_3 = v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) La dernière colonne du tableau indique que tous les points relevés sont exactement dans le plan $\mathcal{P}$ (leur composante selon le seul plan de la base situé hors de $\mathcal{P}$ est nul).

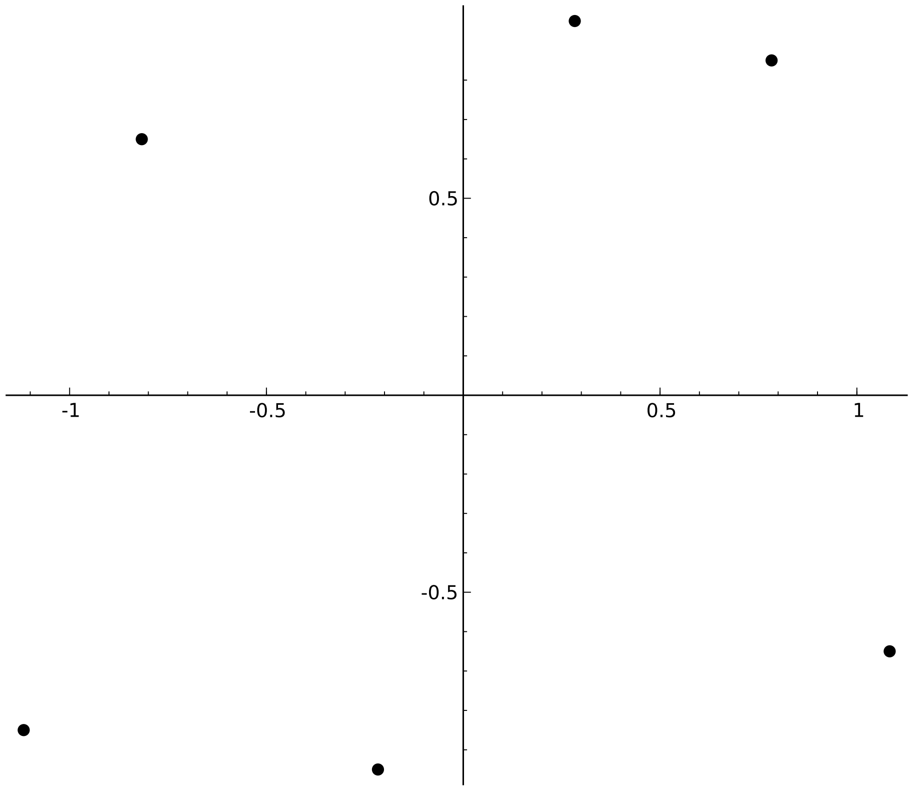
2. (a) Pour centrer les variables, retire à chaque coefficient la moyenne. Or

$$\overline{X} = 1.32 \qquad \text{et} \qquad \overline{Y} = 1.05$$

Les variables centrées sont donc

X	Y
-0.21	-0.95
1.08	-0.65
-0.82	0.65
0.78	0.85
-1.12	-0.85
0.28	0.95

et



(b) Le problème se traduit sous la forme d'un système sur-déterminer $AX = B$ dont les matrices sont

$$A = \begin{pmatrix} 0.047 & 0.9025 \\ 1.17 & 0.4225 \\ 0.67 & 0.4225 \\ 0.61 & 0.7225 \\ 1.25 & 0.7225 \\ 0.08 & 0.9025 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} \\ \\ \frac{1}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

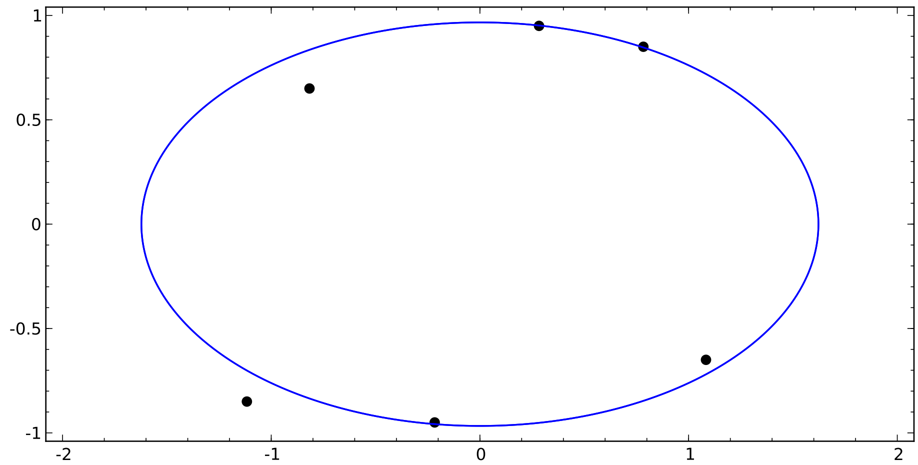
On résout ce problème via le système normal ${}^tAAX = {}^tAB$. Or

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3.76 & 2.24 \\ 2.24 & 3.03 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}^tAB = \begin{pmatrix} 3.83 \\ 4.1 \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système normal est alors

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2} & = & 0.38 \\ \\ \dfrac{1}{\beta^2} & = & 1.07 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & 1.62 \\ \beta & = & 0.97 \end{cases}$$

On peut alors superposer l'ellipse déterminée ce dessus au nuage de points :



(c) D'après les loi de l'astronomie, le soleil autour duquel une planète tourne est placé en un foyer de l'ellipse correspondant à la trajectoire. Ici, le soleil est donc en l'un des deux points

$$F = (\pm\alpha, 0) = (\pm 1.62, 0)$$

$\star\ \star$
$\star$