CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Tous les résultats devront être justifiés.

Exercice 1 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant $\det(M_a)$ en fonction de a.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible.
3. Déterminer le rang de M_a en fonction de a.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la décomposition LU de A.
2. En déduire le déterminant de A.
3. Résoudre le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On suppose que la machine connaît les deux algorithmes suivants :
- L'algorithme `vide_colonne(M,j)` place des 0 dans la colonne j de la matrice M.
- L'algorithme `choix_pivot(M,j)` échange la j ligne de M avec une ligne dont le j-ième terme est non nul. Ce dernier algorithme renvoie la matrice dont les lignes ont été permutées ainsi que le numéro de la ligne placée j-ième position.

1. Écrire un algorithme (papier) qui appelle les deux fonctions ci dessus et qui renvoie la matrice U de la décomposition LU.
2. Écrire un algorithme qui renvoie la matrice U ainsi que la matrice P des permutations nécessaires à la décomposition LU.
3. Cet algorithme s'applique-t-il à n'importe quelle matrice carrée ? Justifier.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 On considère deux variables aléatoires x et y pour lesquelles on relève les valeurs ci-dessous.

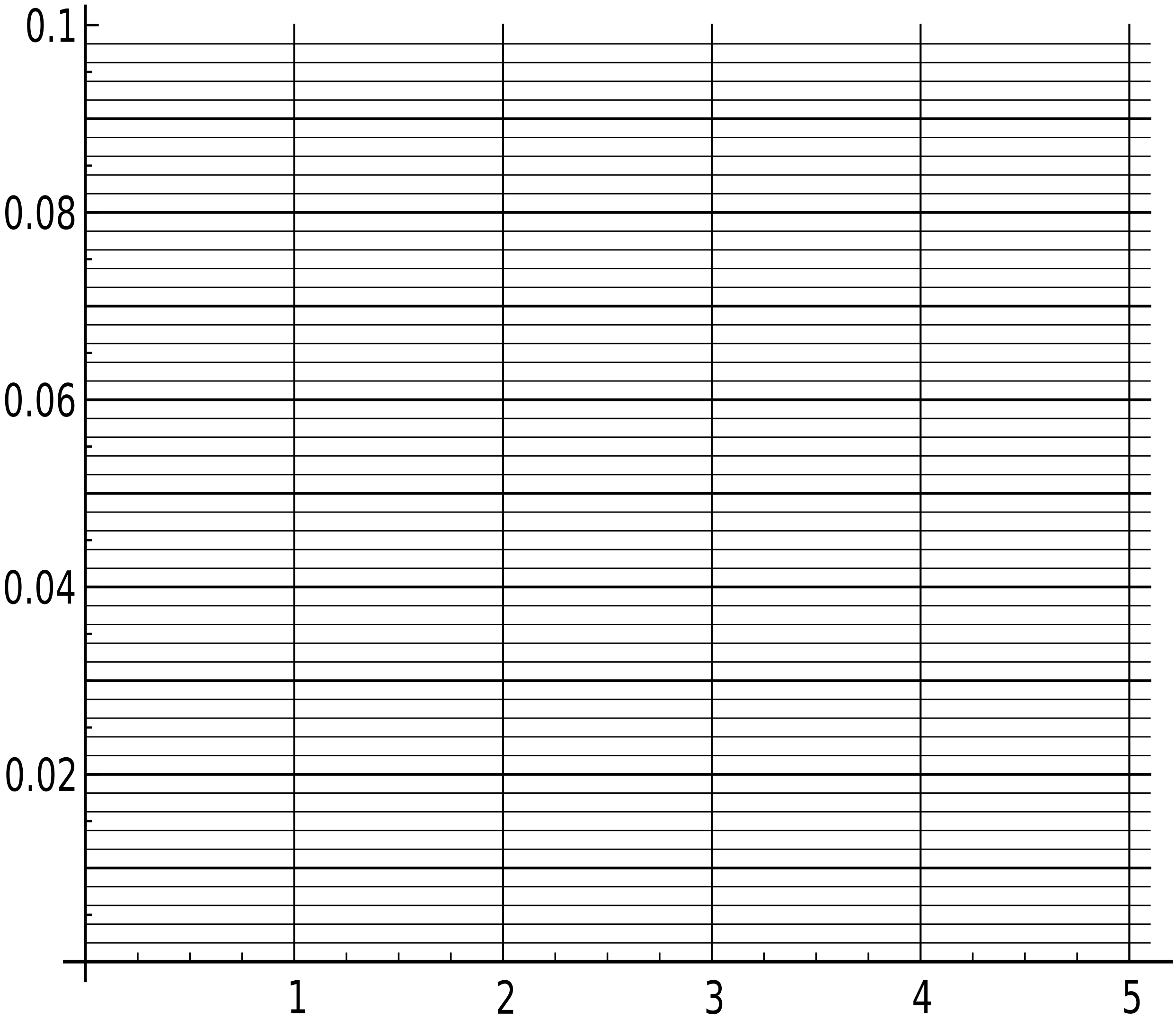
x	0	1	2	3	4	5
y	0.089	0.076	0.062	0.052	0.044	0.040

On cherche à expliquer la variable y en fonction de la variable x.

1. Tracer dans un repère le nuage de points (x_i, y_i) correspondant aux données ci-dessus dans le repère 1 ci-joint.
2. Dans un premier temps une relation entre x et y de la forme
$$y = \frac{1}{ax+b} \tag{1}$$
   (a) Montrer que si x et y vérifient 1, alors x et $\frac{1}{y}$ sont liées par une relation linéaire à déterminer.
   (b) Montrer que les coefficients a et b cherchés doivent être solution du système linéaire $AX = B$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11.23 \\ 13.17 \\ 16.0 \\ 19.0 \\ 22.50 \\ 25.0 \end{pmatrix}$$
   (c) Résoudre le problème par la méthode des moindres carrés.
3. On cherche maintenant une relation de la forme
$$y = be^{ax} \tag{2}$$
   (a) Montrer que la relation 2 peut s'écrire sous la forme
$$\ln y = \alpha x + \beta$$
   où α et β sont à exprimer en fonction de a et b.
   (b) Déterminer le vecteur B_2 tel que les coefficients α et β cherchés soient donnés par le système
$$A \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = B_2$$
   où A est la matrice données à la question 2b.
   (c) Résoudre ce système au sens des moindres carrés.
4. Calculer l'erreur relative de chacune des approximations ci-dessus.
5. Commenter.

⋆ ⋆
⋆

Nom :	Prénom : ....



Repère 1

CORRECTION

Exercice 1

1. Pour calculer le déterminant de M_a, on peut appliquer à M_a les premières opérations du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
\det(M_a) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{vmatrix} & \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-a & 1+a & 1-2a \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & a-8 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 1-2a \\ -2 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & a-8 \end{vmatrix} & \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 1-a & 1+a & 1-2a \\ -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} \\
&= (a-3)\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= -2(a-3)^2
\end{aligned}$$

2. D'après le calcul précédent, M_a est inversible pour tout $a \neq 3$.
3. – Si $a \neq 3$, M_a est inversible et donc de rang maximal. Alors $M_a = 3$.
   – Pour calculer le rang de M_3, on effectue le pivot de Gauss dans M_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \longrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On constate alors que $\mathrm{rg}(M_3) = 2$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1.

Opérations	A	L	P
	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftrightarrow L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	U	L	P

2. Ayant effectué une permutation de lignes lors du pivot, on en déduit que $\det(A) = -\det(U)$. Donc $\det(A) = 4$.

3. Pour résoudre le système $AX = B$ proposé, on le remplace par le double système triangulaire $\begin{cases} LY & = & PB \\ UX & = & Y \end{cases}$.
Ainsi :

$$LY = PB \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 4 \\ x + y & = & -5 \\ 2x + z & = & 7 \\ x - 2z + t & = & 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 4 & & \\ y & = & -5 - x & = & -9 \\ z & = & 7 - 2x & = & -1 \\ t & = & 6 - x + 2z & = & 0 \end{cases}$$

D'où $Y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$UX = Y_0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z - t & = & 4 \\ 2y - z + t & = & -9 \\ -z - t & = & -1 \\ 2t & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 4 + y - 2z + t & = & -2 \\ y & = & \frac{1}{2}(-9 + z - t) & = & -4 \\ z & = & 1 - t & = & 1 \\ t & = & 0 \end{cases}$$

L'unique solution du système proposé est alors $X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n

1.
```
Pour j allant de 1 à n-1 :
    Si a_jj = 0:
        A,i=choix_pivot(A,j)
    A=vide_colonne(A,j)
```

2.
```
P ← I_n
Pour j allant de 1 à n-1 :
    Si a_jj = 0:
        A,i=choix_pivot(A,j)
        L_i ↔ L_j dans P
    A=vide_colonne(A,j)
```

3. Ces algorithmes ne marchent que pour les matrices inversibles, puisque l'on suppose qu'à chaque appel de la fonction `choix_pivot`, la machine parvient à trouver un coefficient non nul à mettre à la place du pivot nul.