CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Tous les résultats devront être justifiés.

Exercice 1 Soit

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ -2x & & & + & z & - & t & = & 1 \\ 4x & + & 3y & + & (b+4)z & + & (a+1)t & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & (b+5)z & + & (a+2b)t & = & a+1 \end{array}\right.$$

1. Transformer le système (S) en un système triangulaire (on pourra s'appuyer sur la représentation matricielle de (S)).
2. Calculer le déterminant de (S).
3. On suppose ici que $\underline{b \neq 0}$.
   (a) Montrer que (S) admet une unique solution.
   (b) Donner cette unique solution en fonction de a et b.
4. On suppose ici que $\underline{b = 0}$.
   (a) Déterminer le rang de (S) en fonction de a.
   (b) Donner la ou les valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) le système est incompatible.
   (c) Dans le cas $a = 1$, donner l'ensemble des solutions de (S) (on précisera sa dimension).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On observe la trajectoire d'une flèche tirée par un archer depuis le sol. Sa trajectoire est supposée parabolique. On note au cours du temps les positions suivantes :

Point n°	1	2	3	4	5
Abscisse (m)	-2	-1	0	1	2
Ordonnée (m)	3	4	4,5	4,2	3,5

1. Déterminer l'équation de la trajectoire à l'aide de la méthode des moindres carrés.
2. En déduire la position du tireur ainsi que l'angle de tir. (On supposera que la flèche part d'une hauteur de 1,5m).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 L'objectif de cet exercice est de décrire les opérations de la fonction `Sage` définie ci dessous.

```
1.  def PDG_LU(A):

2.      U=copy(A)
3.      n=len(U.column(0))
4.      L=identity_matrix(QQ,n)
5.      P=identity_matrix(QQ,n)

        # Choix du pivot
6.      for j in range(n-1):
7.          if U[j,j]==0:
8.              for i in range(j+1,n):
9.                  if U[i,j]!=0:
10.                 U[i],U[j]=U[j],U[i]
11.                 break
12.             P[i],P[j]=P[j],P[i]
13.             for k in range(j):
14.                 L[i,k],L[j,k]=L[j,k],L[i,k]

            # Vide colonne
15.         for i in range(j+1,n):
16.             L[i,j]=U[i,j]/U[j,j]
17.             U[i]=U[i]-(U[i,j]/U[j,j])*U[j]

18.     return P,L,U
```

1. Quel est le nom de cette fonction ? Quels en sont ses arguments ?
2. Quelles opérations effectuent les lignes 4 et 5 ?

3. *La partie Choix du pivot*
   (a) Quelle opération effectue la boucle `for` des lignes 8 à 11 dans `U` ?
   (b) Quelle opération effectue la ligne 12 ?
   (c) Quelles opérations effectue la boucle `for` des lignes 13 et 14 ?

4. *La partie Vide colonne*
   Quelles opérations effectue la boucle `for` des lignes 15 à 17 ?

5. Que renvoie la fonction étudiée ?

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. On applique le pivot de Gauss à la matrice étendue de (S) est

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & b+4 & a+1 & 1 \\ 2 & 3 & b+5 & a+2b & a+1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_2 = L_2 + L_1 \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b+2 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & b+4 & a+2b-1 & a+1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_3 = L_3 - L_2 \\ L_4 = L_4 - 2L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & b & a+2b-1 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ L_4 = L_4 - L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b & a-1 \end{array}\right)$$

2. Ayant effectué le pivot sans permutation, le déterminant de Sest donné par le produit des termes diagonaux de la dernière matrice triangulaire, soit
$$\det(S) = 4b^2.$$

3. (a) $b = 0$ est la seule valeur qui annule le déterminant calculé ci-dessus. Si $b \neq 0$, ce déterminant est non nul et le système est donc inversible.

   (b) L'unique solution du système s'obtient en résolvant le système triangulaire associé à la dernière matrice étendue :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcr} 2x + y + z + t & = & 0 \\ y + 2z & = & 1 \\ bz + (a-1)t & = & 0 \\ 2bt & = & a-1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccr} x & = & \frac{1}{2}(-y-z-t) & = & -\frac{(a-1)^2}{4b^2} - \frac{a-1}{4b} - \frac{1}{2} \\ y & = & 1-2z & = & 1 + \frac{(a-1)^2}{b^2} \\ z & = & -\frac{a-1}{b}t & = & -\frac{(a-1)^2}{2b^2} \\ t & = & \frac{a-1}{2b} & & \end{array}\right.$$

4. (a) Si $b = 0$, la matrice étendue du système, après pivot de Gauss est

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

   Ainsi, si $a = 1$, le système est de rang 2. Sinon, il est de rang 3.

   (b) Si $a \neq 1$, la dernière équation la dernière équation du système triangulaire se lit $0 = 1$. Dans tous ces cas, (S) est donc incompatible.

   (c) Si $a = 1$, le système étant de rang 2, l'ensemble des solutions est de dimension $2(= 4-2)$. On peut donc exprimer l'ensemble des solutions à l'aide des paramètres z et t :

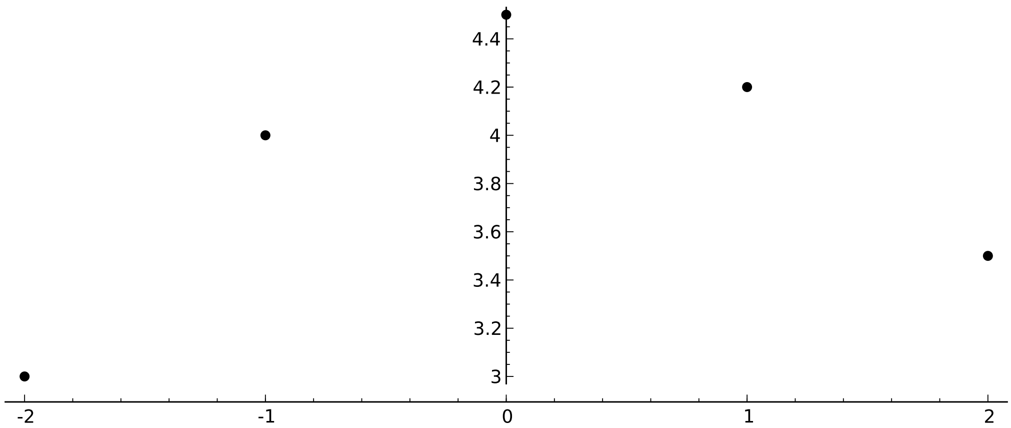
$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & \frac{1}{2}(-y-z-t) & = & \frac{1}{2}(z-t-1) \\ y & = & 1-2z & & \end{array}\right.$$

   D'où

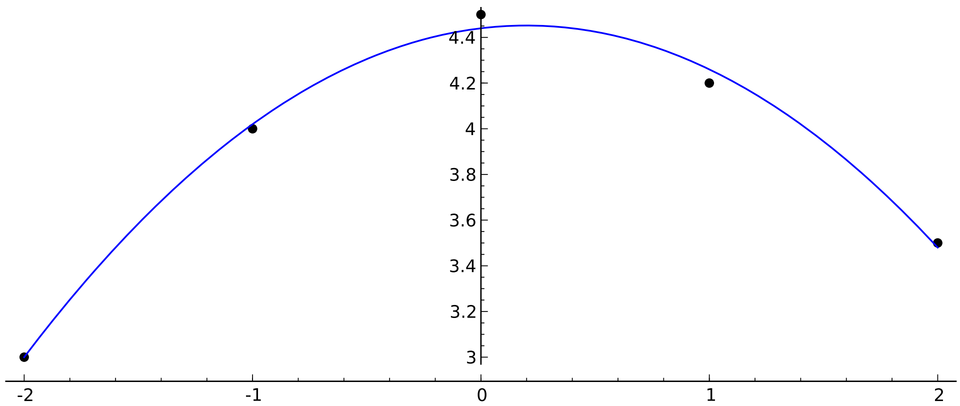
$$\Sigma = \left\{\left(\frac{1}{2}(z-t-1), 1-2z, z, t\right), z, t \in \mathbb{R}\right\}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercic 2 On peut commencer par tracer les images des points observés :



1. Grâce aux données relevées, on peut déterminer l'équation $y = ax^2 + bx + c$ de la parabole passant au plus près de chacun des points observés. On peut en effet traduire la recherche de cette équation sous la forme d'un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients a, b, c et dont les équations sont données par les coordonnées des points relevés :
$$\left\{\begin{array}{rcr} 3 & = & 4a - 2b + c \\ 4 & = & a - b + c \\ 4.5 & = & c \\ 4.2 & = & a + b + c \\ 3.5 & = & 4a + 2b + c \end{array}\right.$$
il s'agit d'un système sur-déterminé dont la forme matricielle $AX = B$ nous permet de déterminer le système des équations normales ${}^tAAX =^t AB$:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4.5 \\ 4.2 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$${}^tAA = \begin{pmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 34.2 \\ 1.2 \\ 19.2 \end{pmatrix}$$
Finalement, la résolution du système 3×3 associé donne
$$\left\{\begin{array}{rcr} a & = & -0.3 \\ b & = & 0.12 \\ c & = & 4.44 \end{array}\right.$$
On peut alors ajouter la trajectoire calculée au nuage :



2. La trajectoire est la courbe d'équation $y = P(x)$ où $P(x) = -0.3x^2 + 0.12x + 4.44$.
   - La position du tireur est donnée par l'abscisse du point d'ordonnées $y = 1.5$ (hauteur de tir d'après l'énoncé). Il reste donc à résoudre l'équation

     $$1.5 = -0.3x^2 + 0.12x + 4.44 \iff 0.3x^2 - 0.12x - 2.94 = 0$$

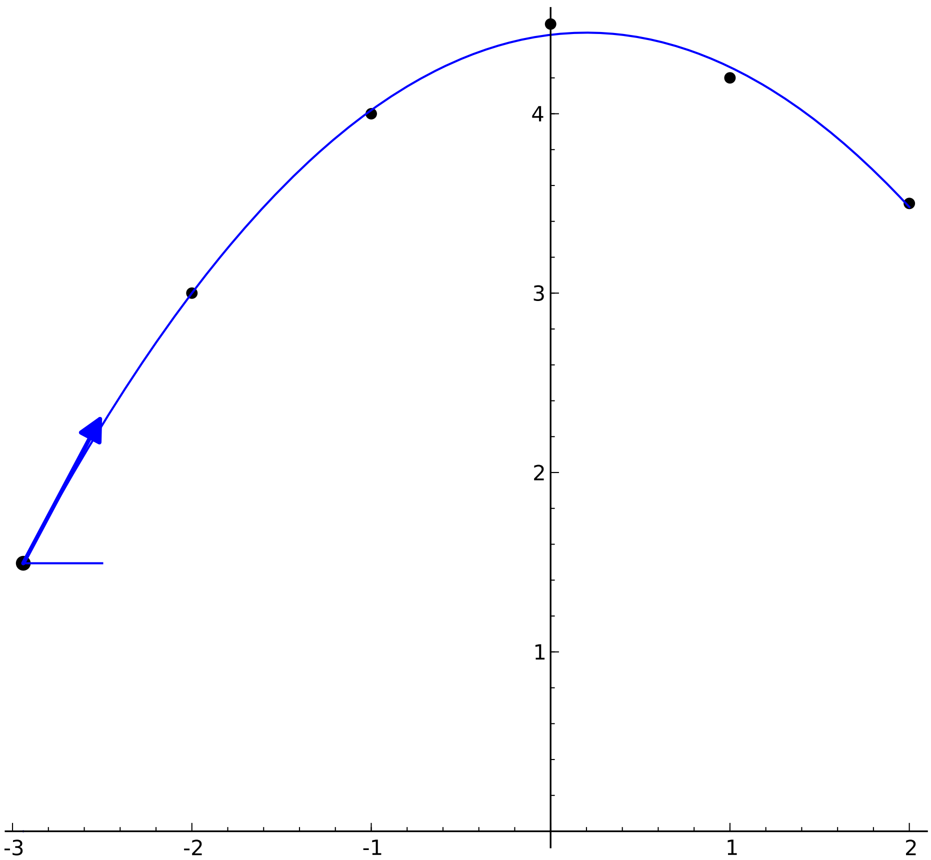
     Or ce dernier polynôme admet $x_1 = -2.94$ et $x_2 = 3.34$ comme racines. La position cherchée correspond donc à la solution négative : $x_1 = -2.94$.

   - L'angle de tir est alors donné par pente de la tangente à cette trajectoire au point de départ trouvé ci-dessus, soit

     $$p'(-2.94) = (-0.6) \times (-2.94) + 0.12 = 1.88$$

     Précisément, cette pente est la tangente de l'angle cherché. Ainsi, l'angle α de tir est

     $$\alpha = \arctan(1.88) \approx 62^\circ$$



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercic 3

1. La fonction s'appelle `PDG_LU`. Elle n'a qu'un argument : la matrice `A`.
2. Les lignes 4 et 5 initialisent les matrices `L` et `P` à la matrice identité de taille `n`.
3. (a) La boucle `for` ouverte à la ligne 8 cherche, sous le coefficient $\mathtt{a_{jj}}$ un coefficient non nul. Quand un tel coefficient est trouvé, la boucle échange la ligne correspondante avec la ligne `j` et sort.
   (b) La ligne 12 échange, dans `P` les même lignes qu'à l'étape précédente.
   (c) Les lignes 13 et 14 échange dans `L` les coefficients correspondant la encore à l'échange effectué dans la boucle `for` en prenant soin de conserver la diagonale de 1 de `L`.
4. La boucle `for` ouverte à la ligne 15 place des zéros dans la colonne `j`, sous le pivot, en calculant le coefficient de chaque combinaison à partir des coefficients de la matrice. Avant d'effectuer chaque combinaison, la boucle place dans `L` le coefficient de la combinaison.
5. La fonction `PDG_LU` renvoie les matrices `P`, `L` et `U` associées à la décomposition LU d'une matrice A.

⋆ ⋆
⋆