CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1 Associer à chaque système ci-dessous sa représentation graphique (on prendra soin de justifier rapidement les associations).

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x+2y &= 1 \\ x-2y &= 0 \end{cases}$$

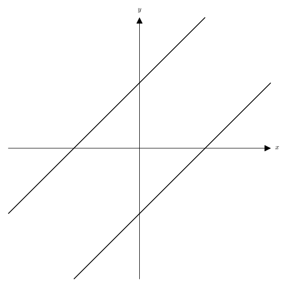


fig. 1

$$(S_2)\ :\ \begin{cases} x-y &= 1 \\ -x+y &= 1 \end{cases}$$

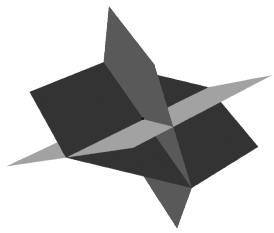


fig. 2

$$(S_3)\ :\ \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

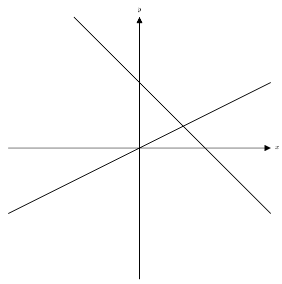


fig. 3

$$(S_4)\ :\ \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ x+z &= 0 \end{cases}$$

fig. 4

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(S_\lambda)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & \lambda t & = & 1 \\ x & + & \lambda y & - & z & - & t & = & -\lambda \\ \lambda x & + & y & + & z & + & t & = & -1 \\ x & - & y & + & \lambda z & - & t & = & -\lambda \end{array}\right. , \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Transformer le système (S_λ) en un système triangulaire à l'aide du Pivot de Gauss.
2. En déduire le déterminant de (S_λ) sous forme factorisée.
3. Donner, en fonction de λ, le rang du système (S_λ).
4. On suppose ici $\lambda \notin \{-1, 3\}$. Déterminer l'unique solution de (S_λ).
5. Résoudre les systèmes (S_{-1}) puis (S_3).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On suppose que la machine possède en mémoire un algorithme `sol_PDG(A,B)` qui résout le système linéaire carré $AX = B$ à l'aide du pivot de Gauss (la solution étant renvoyée sous la forme d'un vecteur).

1. Décrire les opérations de l'algorithme 1 présenté en annexe 1 en répondant le plus précisément possible aux questions suivantes :
   (a) Quel est le nom de la fonction construite ?
   (b) Quels sont les arguments de cette fonction ?
   (c) Quelles actions effectuent les lignes 2 et 3 ?
   (d) Quelle action effectue la ligne 4 ?
   (e) Quelle action effectue la ligne 5 ?
   (f) Que renvoie la fonction ?

2. Décrire les actions de l'algorithme 2 présenté en annexe 1 en répondant le plus précisément possible aux questions suivantes :
   (a) Quel est le nom de la fonction ? Quels sont ses arguments ?
   (b) Quelles actions effectuent les lignes 2 et 3 ?
   (c) Quelles actions effectue la boucle ouverte à la ligne 4 ?
   (d) Quelles actions effectue la ligne 8 ?
   (e) Que renvoie la fonction ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Maximiser } P(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \qquad \text{(Fonction profit)}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leqslant & 8 & \qquad \text{(Contrainte de stock 1)} \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant & 7 & \qquad \text{(Contrainte de stock 2)} \\ x_2 & \leqslant & 3 & \qquad \text{(Contrainte de stock 3)} \end{cases}$$

dont le polygone des possibilités est donné en annexe 2.

1. *Résolution graphique*
   (a) Tracer sur le dessin fourni la droite de profit correspondant à un profit $P = 20$. S'agit-il du profit maximum ? (Justifier).
   (b) Déterminer graphiquement le profit maximum réalisable ainsi que l'organisation associée.
2. *Le simplexe*
   (a) Transformer le système de contraintes en un système d'équations en y introduisant les variables d'écart.
   (b) Donner le rang du système obtenu.
   (c) Déterminer les variables de base et les variables hors base correspondant à la solution optimale.
   (d) Donner l'unique solution $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ correspondant à la solution optimale et faire le bilan des stocks.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 1

Algorithme 1

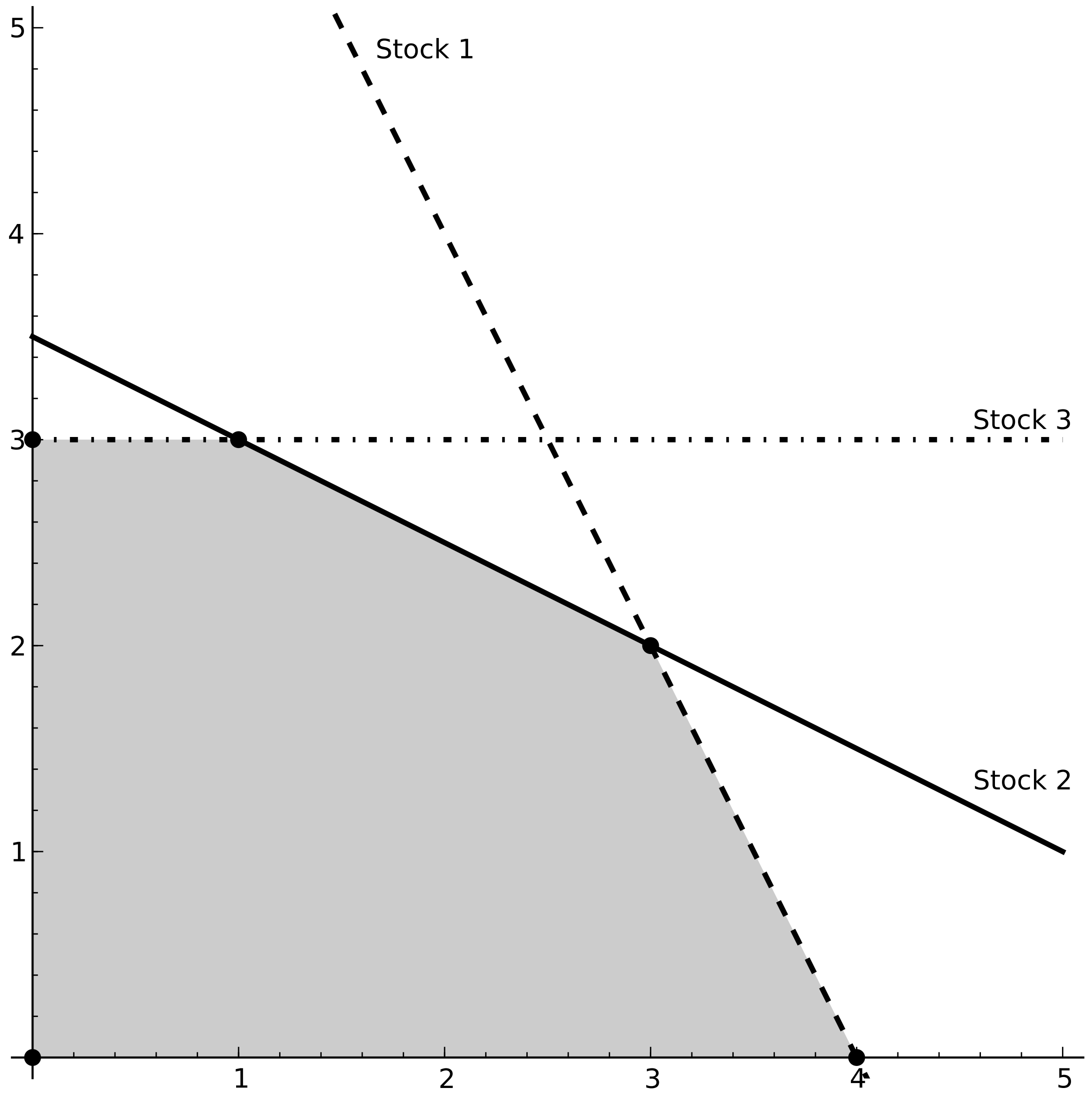
```
1.  def MC(A,B):

2.      tAA=transpose(A)*A
3.      tAB=transpose(A)*B

4.      X0=sol_PDG(tAA,tAB)
5.      er2=(norm(A*X0-B)/norm(B))**2

6.      return X0,er2
```

Algorithme 2

```
1.  def Reg_lin1(X,Y):

2.      n=len(X)
3.      A=matrix(QQ,n,2)

4.      for k in range(n):
5.          A[k][0]=X[k]
6.          A[k][1]=1
7.      B=copy(Y)

8.      X0,er2=MC(A,B)

9.      a=X0[0]
        b=X0[1]
        R2=1-er2

10.     return (a,b),R2
```

Nom : ....   Prénom : ....

ANNEXE 2



CORRECTION

Exercice 1

Pour commencer, on associe les droites aux systèmes 2×2 et les plans aux systèmes 3×3.

1. *Les droites.*

   Le système (S_1) a pour matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Son déterminant est donc $\det(A_1) = -4 - 2 = -6 \neq 0$. (S_1) admet donc une unique solution. Il correspond au dessin 2D sur lesquelles les droites se coupent : figure 3.

   Par élimination, (S_2) est associé à la figure 1 (par calcul, on peut vérifier que (S_2) est un système incompatible, correspondant donc à deux droites parallèles).

2. *Les plans.*

   Parmi les deux systèmes 3×3, il s'agit de déterminer lequel correspond à une famille de plans indépendants (figure 2). Pour cela, on peut par exemple calculer les déterminant de (S_3) dont la matrice est

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Or

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

   (S_3) est donc inversible et associé à la figure 2. Par élimination, (S_4) est associé à la figure 4 (on pourra vérifier que (S_4) n'est pas inversible en calculant son déterminant ou en notant que, dans (S_4), on a $L_3 = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$).

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercic 2

1. La matrice étendue du système (S_λ) est

$$A_\lambda = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 & -\lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda & -1 & -\lambda \end{array}\right)$$

Pour calculer son déterminant, on applique le pivot de Gauss :

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & 1-\lambda^2 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \end{array}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2+\lambda-\lambda^2 & \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \end{array}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1)(\lambda-2) & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda-3 & -\lambda-1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

2. N'ayant effectué aucune permutation, le déterminant de (S_λ) est le déterminant de la partie triangulaire de la matrice obtenue en bout de pivot :

$$\det(S_\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^2-2\lambda-3) = (\lambda+1)^3(\lambda-3).$$

3. D'après les calculs ci-dessus, pour $\lambda \notin \{-1, 3\}$, le déterminant de (S_λ) est non nul. Le système est alors de rang maximum. Donc (S_λ) est de rang 4 et admet une unique solution.

   Pour $\lambda = -1$, la dernière matrice issue du pivot fait apparaître trois lignes de 0. Le rang du système (S_{-1}) est donc 1.

   Enfin, pour $\lambda = 3$, le pivot fait apparaître une ligne de 0 (si l'on écarte le second membre). Le rang de (S_3) est donc 3.

4. Pour déterminer l'unique solution de (S_λ), on résout en remontant le système triangulaire issu du pivot de Gauss :

$$
\begin{aligned}
(S_\lambda) &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & \lambda t & = & 1 \\ & & (\lambda+1)y & - & & & (\lambda+1)t & = & -\lambda-1 \\ & & & & (\lambda+1)z & - & (\lambda+1)(\lambda-2)t & = & 0 \\ & & & & & & (\lambda+1)(\lambda-3)t & = & -\lambda-1 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} t & = & -\frac{1}{\lambda-3} & & \\ z & = & (\lambda-2)t & = & -\frac{\lambda-2}{\lambda-3} \\ y & = & t-1 & = & \frac{2-\lambda}{\lambda-3} \\ x & = & 1+y+z-\lambda t & = & \frac{1}{\lambda-3} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

   L'unique solution de (S_λ) est donc le vecteur $X_0 = \left(\dfrac{1}{\lambda-3}, \dfrac{2-\lambda}{\lambda-3}, \dfrac{2-\lambda}{\lambda-3}, -\dfrac{1}{\lambda-3}\right)$.

5. D'après l'étude précédente, (S_{-1}) est un système de rang 1. L'ensemble de ses solution est donc un espace de dimension 3, déterminé par la première équation $x - y - z - t = 1$. D'ou

$$\Sigma_{-1} = \{(1+y+z+t, y, z, t), y, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

   Enfin, toujours d'après l'étude précédente, le pivot de Gauss appliqué au système (S_3) produit pour déterminer ligne l'équation $0 = -4$. Ce système est donc incompatible et n'admet aucune solution.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercic 3

1. (a) La fonction s'appelle `MC` (pour "moindres carrés").
   (b) Elle prend pour arguments les matrices A et B.
   (c) Les lignes 2 et 3 calculent les matrices ${}^tAA$ et ${}^tAB$ et les stockent respectivement dans les variables `tAA` et `tAB`.
   (d) La ligne 4 résout le système carré associé aux matrices `tAA` et `tAB` à l'aide du pivot de Gauss. Ces matrices correspondent au système des équations normal du système de départ (associé à A et B).
   (e) La ligne 5 calcul le produit $\frac{||AX_0-B||^2}{||B||^2}$ correspondant à l'erreur commise par la méthode des moindres carrés.
   (f) La fonction renvoie la solution optimale `X0` ainsi que l'erreur.

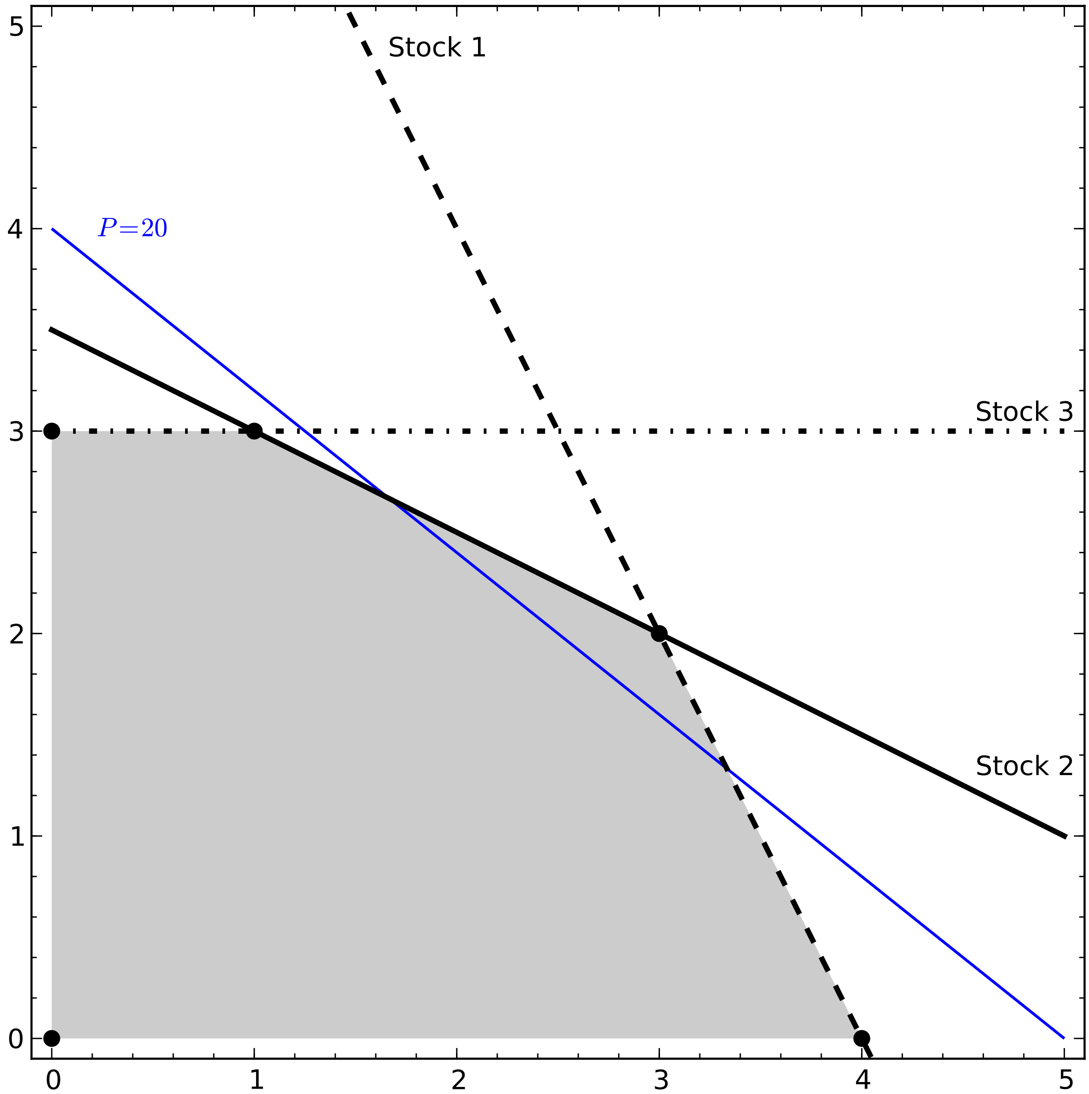
2. (a) La fonction s'appelle `Reg_lin1`. Elle prend pour arguments deux vecteurs `X` et `Y`.
   (b) La ligne 2 stocke dans `n` la longueur du vecteur `X`. La ligne 3 initialise `A` à une matrice à n lignes et 2 colonnes.
   (c) La boucle `for` ouverte à la ligne 4 remplace la première colonne de `A` par le vecteur `X` (coordonnée par coordonnée) et la seconde colonne de `A` par une colonne de 1.
   (d) La ligne 8 applique la méthode des moindres carrés au système $AX = Y$ et renvoie la meilleure solution ainsi que l'erreur.
   (e) La fonction applique donc la méthode des moindres carrés à la recherche de la meilleure droite passant par le nuage de points défini par les vecteurs X et Y. Elle renvoie d'une côté le couple (a, b) donnant l'équation $y = ax + b$ de cette meilleure droite et de l'autre l'erreur commise en supposant que tous les points du nuage étudié sont alignés sur cette droite.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4

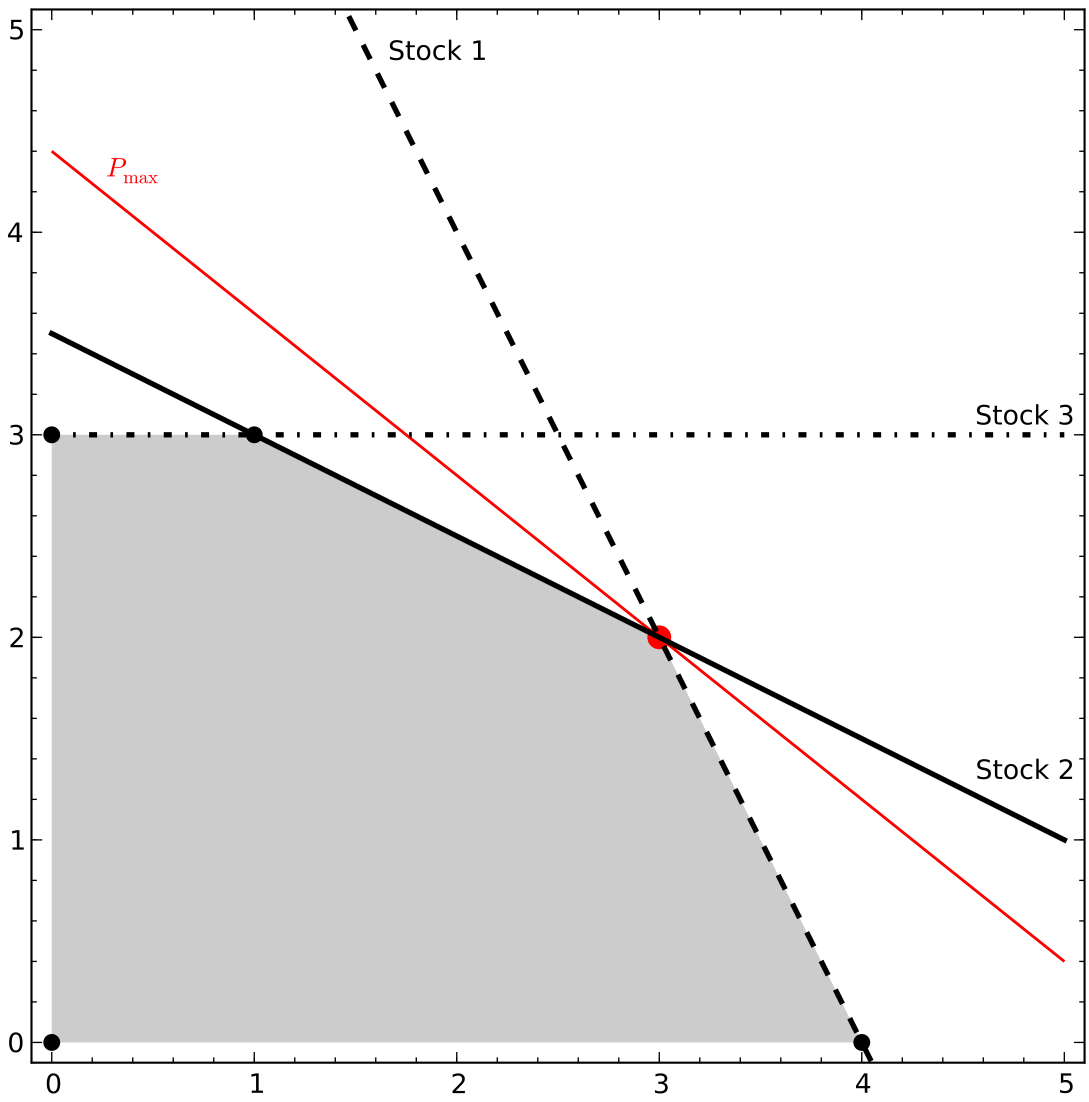
1. *Résolution graphique*
   (a) Un profit de 20 correspond à l'équation

$$20 = 4x_1 + 5x_2.$$



Il ne s'agit pas du profit maximum puisque l'on peut faire "monter" la droite des profit que l'on vient de tracer tout en conservant une intersection non vide avec l'ensemble des possibilités.

(b) Graphiquement, on constate que la droite de profit la plus haute que l'on puisse tracer dans l'ensemble des possibilités passe par le point $A = (3, 2)$.



L'organisation optimale est donc atteinte pour $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$. Cette solution produit un profit de $P_{\max} = 4 \times 3 + 5 \times 2 = 22$.

2. *Le simplexe*

   (a) Pour transformer le système de contraintes en un système d'équations, on introduit une variable d'écart par équation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & \leqslant & 8 \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant & 7 \\ x_2 & \leqslant & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcccccccl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\ & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \end{array} \right.$$

   (b) Le système ainsi obtenu contient trois équations. D'autre part, la présence de la matrice identité 3×3 au bout de la matrice de ce système assure que ces trois équations sont indépendantes. Le système est donc de rang 3.

   (c) D'après l'étude graphique faite plus haut, le point optimal est à l'intersection des droites représentant respectivement les contraintes de stock 1 et 2. En ce point, les variables d'écart x_3 et x_4 sont donc nulles. Ces deux dernières variables sont donc hors base, et les trois autres forment les variables de base associées à cette solution.

(d) Le système étant de rang 3, si l'on impose $x_3 = x_4 = 0$, on obtient une unique valeur pour chacune des variables de base. D'autre part, l'étude graphique nous a montré qu'à l'optimum, on a $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$. La seule valeur qu'il reste à calculer est donc x_5. Or $x_5 = 3 - x_2 = 1$. La solution étudiée est donc $(3, 2, 0, 0, 1)$.

Du point de vue des stock, puisque $x_3 = x_4 = 0$, l'ensemble des stocks 1 et 2 sera utilisé. La valeur $x_5 = 1$ indique que le stock trois contiendra encore une unité à la fin de la production.

⋆ ⋆
⋆