CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(S_{a,b})$ le système linéaire d'inconnues (x, y, z) défini par

$$(S_{a,b}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

1. Montrer à l'aide du Pivot de Gauss que $(S_{a,b})$ est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (1-a)(a+2)z & = & b-a \end{array} \right.$$

2. En déduire les valeurs de a et b pour lesquelles $(S_{a,b})$ admet une unique solution (on ne calculera pas cette solution).
3. On suppose ici que $\underline{b \neq 0}$.
   (a) Montrer que si $a = 1$, le système admet des solutions si et seulement si $b = 1$. Décrire alors l'ensemble des solutions de $(S_{1,1})$. On précisera en particulier le rang du système et la dimension de l'ensemble des solutions.
   (b) Montrer que si $a = -2$, le système admet des solutions si et seulement si $b = -2$. Décrire alors l'ensemble des solutions de $(S_{-2,-2})$. On précisera en particulier le rang du système et la dimension de l'ensemble des solutions.
4. Montrer que si $b = 0$, le système $(S_{a,0})$ n'admet pas de solution.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & 2y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{array} \right.$$

1. Donner une interprétation géométrique de chacune des équations du système (S) et les représenter dans le repère ci-joint.
2. Montrer graphiquement que le système (S) est sur-déterminé.
3. Résoudre (S) par la méthode des moindres carrés.
4. Placer dans le repère ci-joint la solution obtenue à la question précédente. Commenter.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 L'objectif de cet exercice est de décrire et compléter l'algorithme donné en annexe 1.

1. Quel est le nom de la fonction construite ? Quels sont ses arguments ?
2. Quelles actions effectuent les lignes 2 et 3 ?
3. Quelle est l'action effectuée à la ligne 7 ?
4. Quel est le rôle du test `if` ouvert à la ligne 9 ?
5. Décrire les actions effectuées dans ce test `if` (on précisera en particulier le rôle de la ligne 12).
6. Quel est le rôle de la ligne 14 ?
7. Quelles actions effectuent les lignes 17 et 18 ? Dans quel but ?
8. Quel est le rôle de la boucle `for` ouverte à la ligne 19 ?
9. Quel est en particulier le rôle du test `if` effectué à la ligne 20 ?
10. Quelles actions sont effectuées aux lignes 21 et 22 ?
11. Que renvoie la fonction ?
12. En l'état, quelles sont les matrices auxquelles s'applique cet algorithme ?
13. Compléter les tests `if` ouverts aux lignes 4 et 15 afin que la fonction renvoie un message d'erreur approprié dans le cas d'une utilisation non conforme de cet algorithme.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 On note $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant (issu d'un problème de production sous contraintes de stock) :

$$\max \text{ de } P(x,y,z) = 6x + 6y + 6z$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x + y \leqslant 10 \\ y + z \leqslant 12 \\ x + z \leqslant 10 \end{cases}$$

$$x, y, z \geqslant 0$$

1. Introduire les variables d'écart au système de contraintes et donner le rang du système ainsi obtenu.
2. Donner le nombre variables de base pour toute base de ce programme linéaire et dresser le tableau simplexe correspondant au choix des variables d'écart pour variables de base.
3. À partir de ce premier tableau, l'algorithme du simplexe conduit au tableau suivant :

x	y	z	e_1	e_2	e_3	cstes	
1	0	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	6	x
0	1	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4	y
0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	8	z
0	0	0	-3	-3	-3	-108	

   (a) Pourquoi l'algorithme s'arrête-t-il ?

   (b) Résoudre $\mathcal{P}$ à l'aide de ce tableau. On précisera
   - la valeur optimale de P,
   - les valeurs de x, y et z correspondant à la solution optimale,
   - l'état des stocks à l'issue de cette production optimale.

⋆ ⋆
⋆

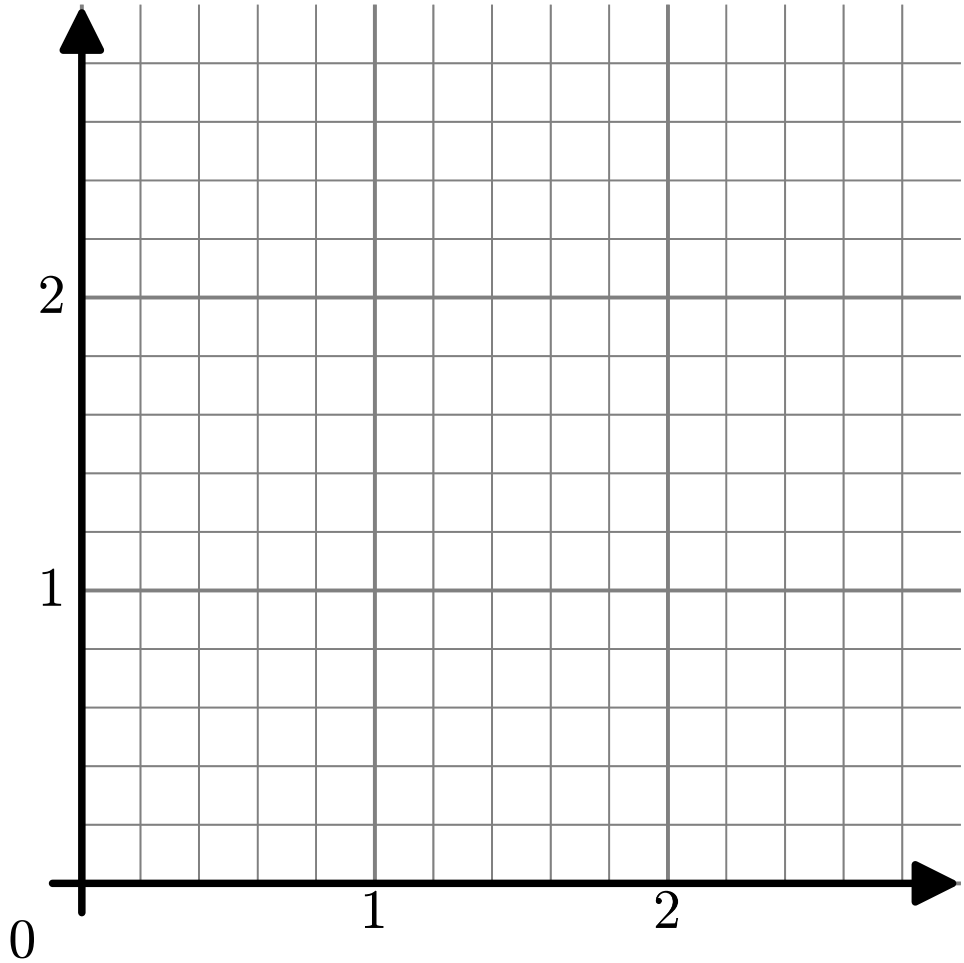
Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 1

```
def invMat(A):

    m=len(A.column(0))
    n=len(A.row(0))

    if ..........................
        return ......................

    AA=copy(A)
    invA=identity_matrix(QQ,n)

    for j in range(n):

        if AA[j,j]==0:
            for i in range(j+1,n):
                if AA[i,j]<>0:
                    invA[i],invA[j]=invA[j],invA[i]
                    AA[i],AA[j]=AA[j],AA[i]
                    break

        if ..........................
            return ......................

        invA[j]=(1/AA[j,j])*invA[j]
        AA[j]=(1/AA[j,j])*AA[j]

        for i in range(n):
            if i<>j:
                invA[i]=invA[i]-AA[i,j]*invA[j]
                AA[i]=AA[i]-AA[i,j]*AA[j]

    return invA
```

Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 1



CORRECTION

Exercice 1

1. Les opérations permettant de traiter la première colonne de la matrice étendue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right)$$

sont

$$\begin{array}{lcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \leftarrow & L_3 - aL_1 \end{array}$$

et conduisent à la matrice étendue

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & b-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

La dernière opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ produit la matrice triangulaire correspondant au système triangulaire souhaité.

2. D'après le calcul ci-dessus, le déterminant du système $S_{a,b}$ est

$$\det(S_{a,b}) = 1 \times b(a-1) \times (1-a)(a+2) = -b(a-1)^2(a+2)$$

Ainsi, si $b \neq 0$ et $a \notin \{-2, 1\}$, ce déterminant est non nul et le système $S_{a,b}$ admet une unique solution.

3. (a) Si $a = 1$, les deux dernières lignes du système triangulaire associé à $(S_{1,b})$ sont de la forme $0 = b - 1$. Ce système admet donc des solutions si et seulement si $b - 1 = 0$, soit $b = 1$.
Le système $(S_{1,1})$ est alors de rang 1, équivalent à l'unique équation $x + y + z = 1$. L'ensemble des solutions de ce système est donc le sous espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 décrit par

$$\Sigma_{1,1} = \{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$$

(b) Si $a = -2$, la dernière ligne du système triangulaire associé à $(S_{-2,b})$ est de la forme $0 = b + 2$. Ce système admet donc des solutions si et seulement si $b + 2 = 0$, soit $b = -2$.
Le système $(S_{-2,-2})$ est alors de rang 2, équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 6y & + & 3z & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 + 2y + 2z & = & z \\ y & = & -\frac{1+z}{2} & & \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc le sous espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 décrit par

$$\Sigma_{-2,-2} = \left\{ \left(z, -\frac{1+z}{2}, z\right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Si $b = 0$, on a

$$(S_{a,0}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccrcr} x & + & az & = & 1 \\ & & (1-a)z & = & -1 \\ & & (1-a)(a+2)z & = & -a \end{array}\right.$$

En effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (a+2)L_2$ dans ce dernier système, on fait apparaître en dernière ligne l'équation

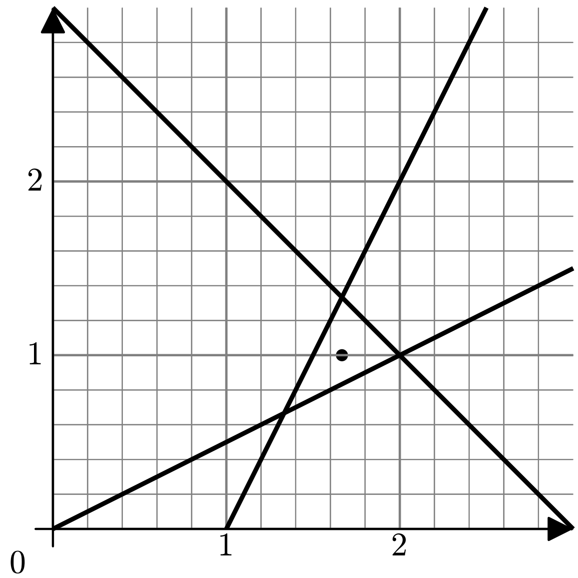
$$0 = -a + (a+2) = 2$$

Le système $(S_{a,0})$ est donc incompatible quelque soit $a \in \mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2

1. Chacune de ces droites peut être représentée par une droite dans le plan muni d'un repère.



2. Les trois droites ci-dessus étant non concourantes, le système associé est sur déterminé. Il n'admet pas de solution exacte.
3. La meilleure solution de ce système, au sens des moindres carrés est la solution du système normal ${}^tAAX ={}^t AB$ où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
Or
$${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
et
$${}^tAB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi
$${}^tAAX ={}^t AB \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 7 \\ -3 & 6 & 1 \end{array}\right) \;\Leftrightarrow\; \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 9 & 9 \\ -3 & 6 & 1 \end{array}\right) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & -\frac{1-6y}{3} \;=\; \frac{5}{3} \end{array}\right.$$
La meilleure solution de (S) est donc le couple $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. En plaçant le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ dans le repère ci dessus, on constate que le point se trouve au niveau du centre de gravité du triangle défini par les trois droites du système de départ.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. Le nom de la fonction est `invMat`. Elle prend pour unique argument une matrice `A`.
2. La ligne 2 permet de stocker dans `m` le nombre de lignes de `A` (i.e. la longueur de la première colonne de `A`). La ligne 2 permet de stocker dans `n` le nombre de colonnes de `A` (i.e. la longueur de la première ligne).
3. La ligne 7 permet de stocker dans `invA` la matrice identité de taille n.
4. Le test `if` de la ligne 9 est permet de traiter la rencontre d'un éventuel pivot nul.

5. Si un pivot nul est rencontré, le programme parcourt la colonne qu'il est en train de traiter à la recherche d'un coefficient non nul. Lorsqu'il en trouve un, il permute la ligne associée avec la ligne contenant le pivot nul et effectue la même opération dans la matrice `invA` (ligne 12).
6. La ligne 14 permet d'arrêter la recherche de pivot non nul au premier coefficient non nul rencontré.
7. Le but de la ligne 18 est de passer le pivot à 1 en divisant sa ligne par sa valeur. La même opération est effectuée au préalable dans sur la ligne de `invA` (ligne 17).
8. La boucle `for` ouverte à la ligne 19 a pour but de vider la colonne `j`.
9. Le test `if` de la ligne 20 permet de placer des 0 partout *sauf* sur la ligne `j`.
10. La ligne 22 effectue dans `AA` les opérations de lignes nécessaire au placement des 0 dans la colonne `j`, la ligne 21 effectuant au préalable les mêmes opérations dans la matrice `invA`.
11. La fonction `invMat` renvoie la matrice `invA` contenant l'inverse de la matrice `A` donnée en argument.
12. En l'état, il n'existe pas de restriction à l'utilisation de cette fonction. Cependant, le programme s'arrête sur une erreur (division par zéro) s'il est appliqué à une matrice non inversible. Par ailleurs, il est susceptible de s'arrêter (ou pire, de renvoyer un résultat sous forme de matrice) si on l'applique à une matrice rectangulaire.
13.

```
1.  def invMat(A):

2.      m=len(A.column(0))
3.      n=len(A.row(0))

4.      if m<>n:
5.          return "Matrice rectangulaire"

6.      AA=copy(A)
7.      invA=identity_matrix(QQ,n)

8.      for j in range(n):

9.          if AA[j,j]==0:
10.             for i in range(j+1,n):
11.                 if AA[i,j]<>0:
12.                     invA[i],invA[j]=invA[j],invA[i]
13.                     AA[i],AA[j]=AA[j],AA[i]
14.                     break

15.         if AA[j,j]==0:
16.             return "Matrice non inversible"

17.         invA[j]=(1/AA[j,j])*invA[j]
18.         AA[j]=(1/AA[j,j])*AA[j]

19.         for i in range(n):
20.             if i<>j:
21.                 invA[i]=invA[i]-AA[i,j]*invA[j]
22.                 AA[i]=AA[i]-AA[i,j]*AA[j]

23.     return invA
```

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4

1. En introduisant une variable d'écart par contrainte, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x & + & y & & & + & e_1 & & & & & = & 10 \\ & & y & + & z & & & + & e_2 & & & = & 12 \\ x & + & & & z & & & & & + & e_3 & = & 10 \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système de rang 3 portant sur 6 inconnues.

2. Au vu du résultat précédent, toute base de variable devra contenir exactement 3 variables. Le tableau simplexe correspondant au choix des variables d'écart comme variables de base est

x	y	z	e_1	e_2	e_3	cstes	
1	1	0	1	0	0	10	e_1
0	1	1	0	1	0	12	e_2
1	0	1	0	0	1	10	e_3
6	6	6	0	0	0	0	

3. L'algorithme s'arrête au tableau donné car dans la dernière ligne, tous les coefficients sont négatifs ou nuls.

4. D'après ce dernier tableau,
   - Le maximum de P, atteint pour cette solution, est $P_{\max} = 108$.
   - Cette solution optimale est atteinte pour

$$x = 6, \quad y = 4, \quad z = 8$$

   - Les trois variables d'écart étant hors de la base, est sont nulles à la solution optimale. Cela signifie que l'ensemble du stock disponible a été consommé pour réaliser cette production optimale.

⋆ ⋆
⋆