CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 1 \\ x & + & by & + & az & = & a \\ bx & + & a^2y & + & a^2bz & = & a^2b \end{array} \right.$$

On note en outre A, X et B les matrices telles que $(S) \ \Leftrightarrow \ AX = B$.

1. Donner la matrice étendue $\tilde{A}$ du système.
2. Appliquer le pivot de Gauss à $\tilde{A}$.
3. En déduire le déterminant de A.
4. Déterminer le rang de (S) en fonction de a et b.
5. Résoudre le système (S) dans les cas où $\mathrm{rg}(S) < 3$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On considère la fonction `Sage` donné en annexe 1, destiné à travailler sur deux listes `X` et `Y` et sur un entier naturel `d`.

1. Quel est le nom de la fonction ? Quels sont ses arguments ?
2. Qu'est stocké dans la variable `n` ?
3. Décrire les différentes opérations effectuées aux lignes 6 à 10. Que contient la variable `A` à l'issue de ces étapes ?
4. Que contient la variable `B` définie à la ligne 11 ?
5. Quel est le but des opérations effectuées aux lignes 12 à 14 ? Que contient la variable `X0` à l'issue de ces étapes ?
6. Décrire les opérations effectues aux lignes 15 à 18. Que contient la variable `f` à l'issue de ces étapes ?
7. Que contient la variable `err` définie à la ligne 19 ?
8. Que renvoie la fonction étudiée ? Dans quel but ?

9. Quel rôle joue le test `if` ouvert à la ligne 4 ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Une abbaye de Bourgogne possède 2 hectares de vignes pour sa propre consommation. Mais comme elle produit plus de vin qu'elle n'en a besoin, elle commercialise le surplus.

Son vignoble contient deux cépages différents : un hectare de *Pinot Noir* et un hectare de *Gamay*.

Cette année les vendanges ont permis la récolte de

— 2 400 litres de Pinot Noir
— 6 000 litres de Gamay

Pour son usage propre, l'abbaye met d'entrée de coté 400 bouteilles de pinot noir et 4 000 bouteilles de gamay (ATTENTION : 1 bouteille = 0,75 litre).

Elle compte commercialiser le vin restant sous la forme de deux vins :

— Des bouteilles de *Pinot Noir* : ce vin est composé uniquement de Pinot Noir. Chaque bouteille (0,75 litre) se vendra à 30 euros.
— Des bouteilles de *Passe-Tout-Grain* : ce vin est composé d'un tiers de Pinot Noir et deux tiers de Gamay. Chaque bouteille (0,75 litre) se vendra à 20 euros.

Les moines souhaitent optimiser leur production de Pinot Noir et de Passe-Tout-Grain afin d'en tirer un maximum de profit.

1. Montrer que les contraintes de production se traduisent sous la forme du système d'inéquations ci-dessous (on précisera le sens de chacune des inconnues ainsi que le sens de chacune des inéquations) :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y & \leqslant & 8\,400 \\ y & \leqslant & 6\,000 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 & & \end{array}\right.$$
2. Donner en fonction de x et y la fonction $P(x, y)$ donnant le profit à maximiser.
3. Tracer le polygone des possibilités dans le repère donné en annexe 2.
4. Tracer dans ce même repère les droites de profits correspondant à $P = 100\,000$ euros et $P = 150\,000$ euros.
5. L'abbaye peut-elle réaliser un profit de 100 000 euros ? Si oui donner une organisation possible pour atteindre ce résultat.
6. L'abbaye peut-elle réaliser un profit de 150 000 euros ? Si oui donner une organisation possible pour atteindre ce résultat.
7. Donner l'organisation donnant le profit maximum ainsi que la valeur de ce profit maximum.
8. Faire le bilan des stocks à l'issue de la production optimale.

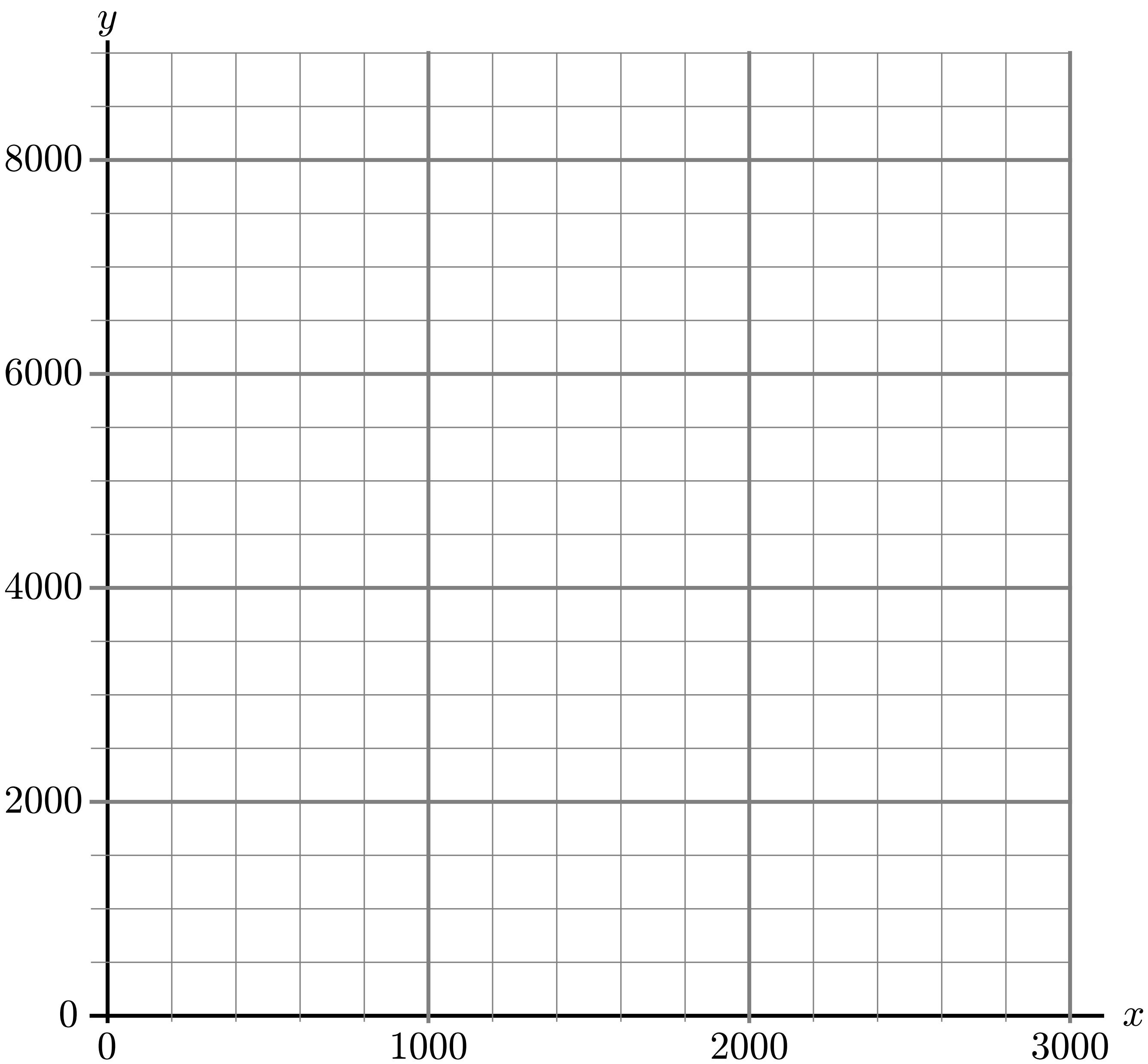
⋆ ⋆
⋆

ANNEXE 1

```
def polyfit(X,Y,d):

    m=len(X)
    n=len(Y)

    if m<>n:
        return "Erreur : les listes de données X et Y
                n'ont pas la même taille"

    colonnes=[]
    for j in range(d+1):
        Cj=[X[i]**j for i in range(n)]
        colonnes.append(Cj)
    A=column_matrix(colonnes)

    B=vector(Y)

    tAA=transpose(A)*A
    tAB=transpose(A)*B
    X0=(tAA)**(-1)*tAB

    x=var('x')
    f(x)=0
    for j in range(d+1):
       f(x) = f(x) + X0[j]*x**j

    err=(norm(A*X0-B)/norm(B))**2

    return f,err
```

Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 2



CORRECTION

Exercice 1 :

1.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & a & a \\ b & a^2 & a^2b & a^2b \end{array}\right)$$

2.

$$\tilde{A} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & b-a & a(1-a) & a-1 \\ 0 & a(a-b) & 0 & a^2b-b \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + aL_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & b-a & a(1-a) & a-1 \\ 0 & 0 & a^2(1-a) & a^2b-b+a^2-a \end{array}\right) = \tilde{U}$$

3. Puisqu'il n'y a pas eu de permutation au cours du Pivot, le déterminant de A est égale au déterminant de la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & a(1-a) \\ 0 & 0 & a^2(1-a) \end{pmatrix}$$

Or celle-ci étant diagonale, son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux. D'où

$$\det(A) = \det(U) = a^2(1-a)(b-a)$$

4. Le système est de rang 3 (maximal) pour tous couples $(a, b) \in \mathbb{R}$ tels que $\det(A) \neq 0$, soit

$$a \neq 0 \qquad a \neq 1 \qquad a \neq b$$

Pour les autres, on a

— Si $a = 0$, on a

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $b = 0$, le système est de rang 1, sinon il est de rang 2.

— Si $a = 1$, on a

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $b = 1$, le système est de rang 1, sinon il est de rang 2.

— Si $a = b \notin \{0, 1\}$, on a

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a(1-a) \\ 0 & 0 & a^2(1-a) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le pivot n'est pas terminé :

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & a(1-a) & a-1 \\ 0 & 0 & a^2(1-a) & a^3-2a+a^2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - aL_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & a(1-a) & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a \end{array}\right)$$

et le système (S) est de rang 2.

5. — <u>Cas $a = 0$ et $b = 0$</u> : on a

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

À cause de la seconde équation, le système et incompatible et n'admet aucune solution.

— <u>Cas $a = 0$ et $b \neq 0$</u> : on a

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{array}\right)$$

La dernière équation se lisant $0 = -b \neq 0$, le système est incompatible et n'admet aucune solution.

— <u>Cas $a = 1$ et $b = 1$</u> : on a

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\{(1 - y - z, y, z), \quad y, z \in \mathbb{R}\}$$

— <u>Cas $a = 1$ et $b \neq 1$</u> : on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & (b-1)y & & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1-z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est alors

$$\{(1 - z, 0, z), \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

— <u>Cas $a = b \notin \{0, 1\}$</u> : on a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & a(1-a) & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a \end{array}\right)$$

Le cas $a = 1$ étant exclu, la dernière équation rend le système incompatible. Celui ci n'a donc pas de solution.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La fonction est a pour nom `polyfit` et pour arguments
   — deux listes `X` et `Y`
   — un entier `d`
2. La variable `n` contient la longueur de la liste `X`.
3. La boucle ouverte à la ligne 7 construit la liste `colonnes` initialisée à la ligne 6.
   Chaque élément `colonnes[j]` de la liste `colonnes` est une liste contenant les différentes puissances j-ièmes des éléments de la liste `X`.
   La variable `A` contient la matrice dont les colonnes sont données par les sous-listes de la liste `colonnes`.
4. La variable `B` définie à la ligne contient le vecteur dont les éléments sont les éléments de la liste `Y`.
5. Les lignes 12 et 13 permettent de définir les matrices du système d'équations normales associées au système sur-déterminé de matrices A et B. La ligne 14 donne l'unique solution de ce système et la stocke dans `X0`.
6. Les lignes 15 à 18 construisent la fonction polynomiale de degré `d` dont les coefficients sont les coordonnées du vecteur `X0` issu de la résolution des équations normales.
7. La variable `err` contient la mesure de l'erreur issue de la résolution approchée du système $AX = B$ par la méthode des moindres carrés.
8. La fonction `polyfit` renvoie le polynôme de degré `d` dont la courbe passe au plus près de l'ensemble des points du nuage de coordonnées $(\mathtt{x_i}, \mathtt{y_i})$.
9. Le test `if` ouvert à la ligne 4 a renvoie un message d'erreur en cas d'utilisation du programme sur des listes de données n'ayant pas la même taille.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Dans ce problème de production, les matières premières sont les deux types de vins issus des deux cépages différents : le Pinot Noir et le Gamay et les produits finis sont le Pinot Noir et le Passe-Tout-Grain. La question à laquelle le protocole d'optimisation doit répondre est la suivante : combien doit-on produire de bouteille de chaque type de produit fini pour optimiser les revenus de l'abbaye. Ainsi, posons

   — x = nombre de bouteilles de Pinot Noir produites pour la vente,
   — y = nombre de bouteilles de Passe-Tout-Grain produites pour la vente.

   D'après le cahier des charges

   — la production de x bouteilles de Pinot Noir nécessite $0.75 \times x$ litres de Pinot Noir,
   — la production de y bouteilles de Passe-Tout-Grain nécessite $0.75 \times \frac{y}{3} = 0.25 \times y$ litres de Pinot Noir et $0.75 \times \frac{2y}{3} = 0.5 \times y$ litres de Gamay.

D'autre part, Une fois retiré des stocks la consommation de l'abbaye, il reste

— $2400 - 400 \times 0.75 = 2100$ litres de Pinot Noir,
— $6000 - 4000 \times 0.75 = 3000$ litres de Gamay.

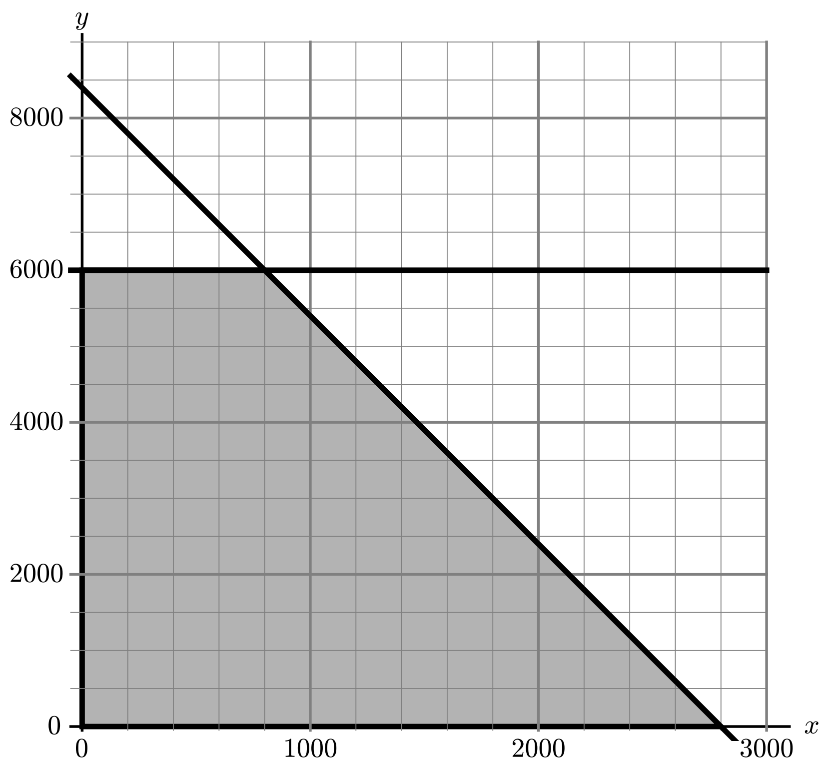
Le système de contraintes de ce problème d'optimisation est donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 0.75x & + & 0.25y & \leqslant & 2100 \\ & & 0.5y & \leqslant & 3000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & \leqslant & 8400 \\ & & y & \leqslant & 6000 \end{array}\right.$$

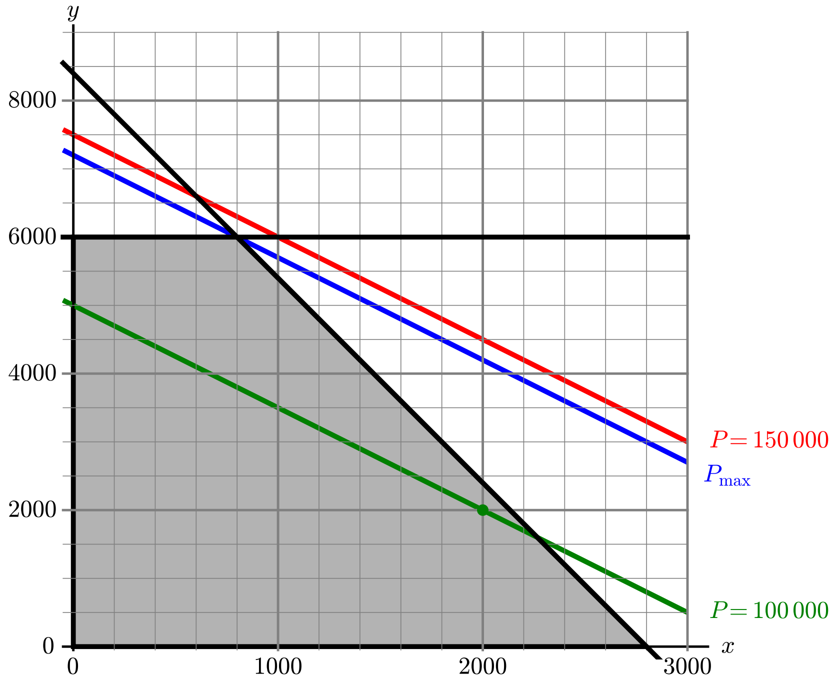
auquel il faut ajouter les contraintes de positivité.

2. D'après l'énoncé, la vente de x bouteilles de Pinot Noir et de y bouteilles de Passe-Tout-Grain rapport
$$P(x, y) = 30x + 20y$$

3.



4. Les droites de profit correspondant aux deux profits envisagés sont tracées dans le repère ci-dessous :



5. On constate que le profit de 100 000 euros est réalisable puisque la droite correspondante passe par le polygone des possibilités. Pour atteindre un tel profit, on peut par exemple mettre en place l'organisation correspondant à $(x, y) = (2000, 2000)$ (c.f. figure ci-dessus).
6. Un profit de 150 000 euros est lui impossible à réaliser puisque la droite correspondante ne rencontre le polygone en aucun point.

7. Au vu du dessin ci-dessus, la droite de meilleur profit est la droite parallèle aux deux droites de profit passant par le point $(800, 6000)$. Le profit réalisé est alors

$$P_{\text{max}} = P(800, 6000) = 144\ 000 \text{ euros}$$

8. Le point $(800, 6000)$ étant à l'intersection des deux droites de contraintes, toutes les ressources sont utilisées pour parvenir au profit maximum.

⋆ ⋆
⋆