CONTRÔLE CONTINU

Systèmes linéaires, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$, on note

$$(S_m) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & my & + & m^2z & = & 2m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 2m \\ mx & - & y & - & m^2z & = & 1-m \end{array} \right.$$

1. Donner la matrice A_m du système (S_m) ainsi que sa matrice étendue $\tilde{A}_m$.
2. Montrer que $\det(A_m) = m(m+1)^2(m-1)^2$.
3. Déterminer, en fonction de m, le rang du système (S_m).
4. Résoudre (S_m). On précisera, le cas échéant, la dimension de l'ensemble des solutions.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Effectuer un Pivot de Gauss sur la matrice A. On prendra soin de n'utiliser que des pivots égaux à ± 1 et on indiquera des opérations effectuées.
2. Donner le déterminant de A (justifier).
3. Déduire du Pivot de Gauss ci-dessus une décomposition LU de la matrice A. On précisera chacune des étapes de la construction de ces matrices.
4. On note

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   (a) À l'aide de la décomposition LU de A, résoudre les systèmes linéaires $AX = B_i$ pour $i = 1, 2, 3$. On notera X_1, X_2, X_3 les solutions respectives des trois systèmes linéaires.

(b) Quel lien peut-on faire entre la matrice A et la matrice $A' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs X_1, X_2 et X_3 obtenus à la question précédente ? Justifier.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère les trois algorithmes donnés en annexes.

1. Ajouter des commentaires au code de la fonction 1.
2. Ajouter des commentaires au code de la fonction 2. On prendra soin d'expliquer les différences avec la fonction 1.
3. Ajouter des commentaires au code de la fonction 3.
4. Donner des noms plus explicites aux trois fonctions.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 On souhaite déterminer l'ensemble des polynômes de degré 2 dont la courbe passe par les points $P_1 = (-1, 1)$ et $P_2 = (1, 1)$ du plan.

1. Traduire le problème sous la forme d'un système linéaire (S).
2. Résoudre (S) et en déduire l'ensemble des polynômes cherchés.
3. Montrer que si l'on applique la méthode des moindres carrés au système (S), on retrouve le même ensemble de solutions.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 1

```
   # La fonction 1 s'applique à ...
   # et renvoie ...
1. def fonction_1(U,B):

       # Initialisations
2.     n=len(B)                               # ...
3.     X=vector(QQ,[0 for k in range(n)])     # ...

       # ...
4.     for i in range(n-1,-1,-1):             # ...

           # ...
5.         S=0
6.         for j in range(i+1,n):             # ...
7.             S += U[i,j]*X[j]

           # ...
8.         X[i]=(B[i]-S)/U[i,i]

9.     return X
```

Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 2

```
# La fonction 2 s'applique à ...
# et renvoie ...
def fonction_2(L,B):

    n=len(B)
    X=vector(QQ,[0 for k in range(n)])

    for i in range(n):                    # ...

        S=0
        for j in range(i):                # ...
            S += L[i,j]*X[j]

        X[i]=B[i]-S                       # ...

    return X
```

Nom : .... Prénom : ....

ANNEXE 3

```
# La fonction 3 s'applique à ...
# et renvoie ...
def fonction_3(A,liste_B):

    # ...
    P,L,U = decomposition_LU(A)[1]   # ...
    Solutions = [ ]                  # ...

    # ...
    for B in liste_B:
        Y = fonction_2(L,P*B)        # ...
        X = fonction_1(U,Y)          # ...
        Solutions.append(X)          # ...

    return Solutions
```

[1] On suppose que la machine connaît une fonction `decomposition_LU(A)` qui renvoie les matrices P, L et U de la décomposition LU d'une matrice A inversible.

CORRECTION

Exercice 1 :

1.
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & -1 & -m^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{A}_m = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m \\ m & -m^2 & m & 2m \\ m & -1 & -m^2 & 1-m \end{array}\right)$$

2. On calcule le déterminant de A_m en appliquant le pivot de Gauss à la matrice $\tilde{A}_m$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m \\ m & -m^2 & m & 2m \\ m & -1 & -m^2 & 1-m \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - m.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m.L_1}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m \\ 0 & 0 & m-m^3 & 2m-2m^2 \\ 0 & -1+m^2 & -m^2-m^3 & 1-m-2m^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & m^2 & 2m \\ 0 & (m-1)(m+1) & -m^2(1+m) & (m+1)(1-2m) \\ 0 & 0 & m(1-m)(1+m) & 2m(1-m) \end{array}\right)$$

Ainsi, puisque l'on a fait une permutation au cours du pivot, on a

$$\det(A_m) = -1.(m-1)(m+1).m(1-m)(1+m) = m(m-1)^2(m+1)^2$$

3. D'après le calcul précédent, le déterminant $\det(A_m)$ s'annule pour $m \in \{-1, 0, 1\}$. Ainsi,

— Pour tout $m \notin \{-1, 0, 1\}$, $\text{rg}(S_m) = 3$ (A_m est inversible, donc le rang du système est maximal).

— Pour $m = -1$, le système (S_{-1}) est du même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1.

— Pour $m = 0$, lle système (S_0) est du même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2.

— Pour $m = 1$, le système (S_1) est du même rang que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2

4. — Système (S_{-1}) :

$$(S_{-1}) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & -4 \end{array}\right.$$

La dernière équation étant caractéristique d'un système incompatible, le système (S_{-1}) n'admet aucune solution.

— Système (S_0) :

$$\begin{aligned}(S_{-1}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & - & y & = & 1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & -1 \end{array}\right.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S_0) est donc

$$\Sigma_0 = \{(0, -1, z), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

Il s'agit d'un espace affine de dimension 1.

— Système (S_1) :

$$\begin{aligned}(S_{-1}) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & & - & 2z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 2 + y - z & = & 1 + y \\ z & = & 1 & & \end{array}\right.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S_1) est donc

$$\Sigma_1 = \{(1 + y, y, 1), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

Il s'agit là encore d'un espace affine de dimension 1.

— Pour tout $m \notin \{-1, 0, 1\}$, le système (S_m) est inversible et

$$\begin{aligned}(S_m) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2 z & = & 2m \\ & & (m-1)(m+1)y & - & m^2(m+1)z & = & (m+1)(1-2m) \\ & & & & m(1-m)(1+m)z & = & 2m(1-m) \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 2m + my - m^2 z & = & \frac{m}{m+1} \\ y & = & \frac{1}{m-1}((1-2m) + m^2 z) & = & -\frac{1}{m+1} \\ z & = & \frac{2}{m+1} & & \end{array}\right.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (S_m) est alors $\Sigma_m = \left\{\left(\dfrac{m}{m+1}, \dfrac{-1}{m+1}, \dfrac{2}{m+1}\right)\right\}$. C'est un espace affine de dimension 0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U \quad (3)$$

2. Puisque l'on a effectué une permutation au cours du Pivot, on a

$$\det(A) = -(-1).(-1).1 = 1$$

3. — Au début du Pivot, on a

$$L = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— À l'issue de l'opération (1), on a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et P reste inchangée.

— À l'issue de l'opération (2), on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— À l'issue de l'opération (3), on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (a) Pour résoudre chacun des systèmes (S_i) : $AX = B_i$, on applique le protocole suivant :

$$\begin{cases} LY &= PB_i & \rightsquigarrow & Y_i \\ UX &= Y_i & \rightsquigarrow & X_i \end{cases}$$

Ainsi,

— $\underline{i=1}$:

$$LY = PB_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & & \\ y & = & -2x & = & -2 \\ z & = & 2y & = & -4 \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

et

$$UX = Y_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & -2 \\ & & & & z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -1-y+z & = & 1 \\ y & = & 2z+2 & = & -6 \\ z & = & -4 & & \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

— $\underline{i=2}$:

$$LY = PB_2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 0 & & \\ y & = & -2x & = & 0 \\ z & = & 1+2y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$UX = Y_2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -y+z & = & -1 \\ y & = & 2z & = & 2 \\ z & = & 1 & & \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \boxed{X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

— $\underline{i=3}$:

$$LY = PB_3 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 0 & & \\ y & = & 1-2x & = & 1 \\ z & = & 2y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et

$$UX = Y_3 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -y+z & = & -1 \\ y & = & 2z-1 & = & 3 \\ z & = & 2 & & \end{array}\right. \qquad \rightsquigarrow \boxed{X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

(b) Par construction, on a

$$X_1 = A^{-1} \times B_1, \qquad X_2 = A^{-1} \times B_2, \qquad X_3 = A^{-1} \times B_3$$

Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$ vérifie

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, les vecteurs X_1, X_2 et X_3 forment les colonnes de la matrice A^{-1}.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. la fonction 1 :

```
# La fonction 1 s'applique à une matrice U
# triangulaire sup inversible et un vecteur B
# et renvoie l'unique solution du système UX=B
def fonction_1(U,B):

    # Initialisations
    n=len(B)                                # n reçoit le nombre
                                            # de lignes du système

    X=vector(QQ,[0 for k in range(n)])      # X reçoit un vecteurs
                                            # contenant n zéros
                                            # destiné à recevoir
                                            # l'unique solution
                                            # cherchée

    # Boucle calculant les coordonnées de X
    for i in range(n-1,-1,-1):              # On remonte les entiers
                                            # de n-1 à 0

        # Calcul de la somme $\sum_{k=i+1}^{n-1} a_{ij}x_j$
        S=0
        for j in range(i+1,n):              # La somme S est fonction
                                            des $x_j$ déjà calculés
            S += U[i,j]*X[j]

        # Le nouvel $x_i$ vaut $\frac{b_i - S}{u_{ii}}$.
        X[i]=(B[i]-S)/U[i,i]

    return X
```

2. La fonction 2

```
# La fonction 2 s'applique à une matrice L
# triangulaire inf ayant une diagonale de 1
# et un vecteur B et renvoie l'unique
# solution du système LX=B
def fonction_2(L,B):

    n=len(B)
    X=vector(QQ,[0 for k in range(n)])

    for i in range(n):                          # Ici, on descend
                                                # les entiers

        S=0
        for j in range(i):                      # Idem, mais les x_i
                                                # calculés sont les
                                                # premiers de X
            S += L[i,j]*X[j]

        X[i]=B[i]-S                             # Ici, les coefficients
                                                # diagonaux de L valent 1

    return X
```

3. La fonction 3

```
# La fonction 3 s'applique à une matrice A
# inversible et une liste de vecteurs liste_B
# et renvoie les solutions des systèmes AX = B_i
# pour chaque B_i de la liste, calculés à l'aide
# de la décomposition LU de A
def fonction_3(A,liste_B):

    # Initialisations
    P,L,U = decomposition_LU(A) [1]                 # Stockage des matrices
                                                    # de la décomposition LU
                                                    # de A

    Solutions = [ ]                                 # Initialisation de la
                                                    # liste des solutions à
                                                    # la liste vide

    # Résolution de tous les systèmes AX = B_i
    for B in liste_B:
        Y = fonction_2(L,P*B)                       # LY = PB_i  ⇝ Y_i
        X = fonction_1(U,Y)                         # UX = Y_i  ⇝ X_i
        Solutions.append(X)                         # Stockage de X_i

    return Solutions
```

4. — Fonction 1 : `solve_triangle sup(U,B)`
   — Fonction 2 : `solve_triangle inf(L,B)`
   — Fonction 3 : `solve_systemes_LU(A,liste_B)`

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. On cherche ici des coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que les deux points P_1 et P_2 appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Ces coefficients doivent donc vérifier les équations suivantes :

$$\begin{cases} P_1 \in \mathcal{P} & \Longleftrightarrow \quad a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 0 \\ P_2 \in \mathcal{P} & \Longleftrightarrow \quad a.(1)^2 + b.(1) + c = 0 \end{cases}$$

   Les coefficients a, b, c cherchés sont donc les solutions du système linéaire

$$(S) : \begin{cases} a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \end{cases}$$

2.
$$(S) \underset{L2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a - b + c & = & 0 \\ 2b & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b & = & 0 \\ c & = & -a \end{cases}$$

   Les polynômes cherchés sont donc les polynômes de la forme

$$P(x) = a.x^2 - a = a.(x^2 - 1)$$

3. Pour appliquer la méthode des moindres carrés au système (S), il faut en extraire les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Les matrices du système normal sont alors

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Le système normal est donc

$$(N) : \begin{cases} 2a + 2c & = & 0 \\ 2b & = & 0 \\ 2a + 2c & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b & = & 0 \\ c & = & -a \end{cases}$$

   On retrouve effectivement le même ensemble de solutions et les mêmes polynômes.

⋆ ⋆
⋆