CONTRÔLE CONTINU

Matrices et systèmes linéaires

Tous les exercices sont indépendants. *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 En justifiant vos choix, associer à chaque système (S_i) ci-dessous sa représentation graphique et donner la nature de l'ensemble des solutions (un point, une droite, un plan, l'ensemble vide).

$$(S_1) : \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 2x+2y &= 1 \\ x-2y &= 0 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x-y &= 1 \\ -x+y &= 1 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ x+z &= 0 \end{cases}$$

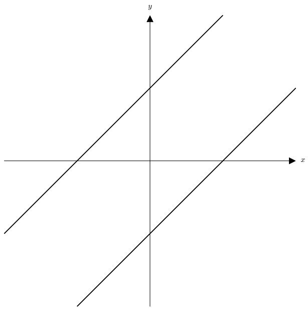

fig. 1

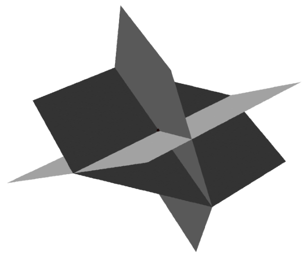

fig. 2

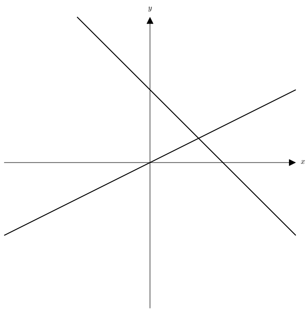

fig. 3

fig. 4

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 puis exprimer A^2 en fonction des matrices A et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse.
3. Donner en fonction de a, b, c l'unique solution du système linéaire

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

d'inconnues (x, y, z).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. *Un peu de théorie*

(a) Soient A et P deux matrices carrées de même taille telles que P soit inversible.
Montrer que si $D = P^{-1} \times A \times P$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

(On admettra que $M^0 = I$ pour toute matrice M carrée).

(b) Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *Application*
Soient

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P et inversible.

(b) Résoudre le système linéaire $P \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ d'inconnues (x, y) et en déduire la matrice P^{-1}.

(c) Montrer que $D = P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.

(d) En s'appuyant sur les résultats de la question 1, montrer qu'il existe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deux matrices M et N à déterminer telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = (-1)^n.M + 2^n.N$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, on note

$$(S_m) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & my & + & 2z & = & m \\ -2x & + & y & + & (m-2)z & = & 1 \\ mx & + & y & + & 2z & = & 2m-1 \end{array} \right.$$

et l'on assimile $\mathbb{R}^3$ à l'espace muni d'un repère $\mathcal{R}$.

1. Donner la matrice A_m du système (S_m) et calculer son déterminant.
2. En déduire les valeurs de m pour lesquelles (S_m) admet une unique solution (on ne calculera pas cette solution).
3. Montrer que le système (S_0) est incompatible.
4. Montrer que le système (S_1) admet une droite de solutions dont on donnera un point et un vecteur directeur.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 : En étudiant les matrices de chaque système, on obtient

— le système (S_1) est un système 3×3 inversible. Il est donc associé à la figure 2 et admet un point comme unique solution.
— le système (S_2) est un système 2×2 inversible. Il est donc associé à la figure 3 et admet un point comme unique solution.
— le système (S_3) est un système 2×2 incompatible. Il est donc associé à la figure 1 et n'admet aucune solution.
— le système (S_4) est un système 3×3 lié. Il est donc associé à la figure 4 et admet une droite de solutions.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & = A^2 \end{array}$$

On constate que $A^2 = A + 2I_3$.

2. D'après l'égalité ci-dessus, on a

$$A \times \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$$

Autrement dit, la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Pour $B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ fixé, le système $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ admet pour unique solution le vecteur

$$X = A^{-1} \times B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a + b + c \\ a - b + c \\ a + b - c \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) On résonne par récurrence :
   — Pour $n = 0$, on a $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I = A^0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   — Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n = (PDP^{-1}) \times (PD^nP^{-1}) \\ &= PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

   et la propriété est héréditaire.

   Par récurrence, la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On montre également par récurrence que si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

2. (a) On a $\det(P) = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$ donc P est inversible.

(b)

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & + & 2y & = & b \end{array} \right. \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ & & y & = & b-a \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & a-y & = & 2a-b \\ y & = & b-a & & \end{array} \right. \end{aligned}$$

L'unique solution du système est donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On en déduit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D est donc bien une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont -1 et 2.

(d) D'après les résultats obtenus à la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.(-1)^n - 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2.(-1)^n - 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n.M + 2^n.N \end{aligned}$$

avec $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. On a $A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 1 & m-2 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned}
\det(A_m) &= \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 1 & m-2 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{=} & \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1+2m & m+2 \\ 0 & 1-m^2 & 2-2m \end{vmatrix} \\
&= (1-m)\begin{vmatrix} 1+2m & m+2 \\ 1+m & 2 \end{vmatrix} \\
&= (1-m)(2(1+2m)-(m+1)(m+2)) \\
&= (1-m)(2+4m-m^2-3m-2) \\
&= (1-m)(m-m^2) = m(1-m)^2
\end{aligned}$$

2. Le système (S_m) admet une unique solution si et seulement si sa matrice A_m est inversible. D'après le calcul ci-dessus, c'est le cas si et seulement si $m \notin \{0,1\}$.
3. La matrice étendue du système (S_0) est

$$\tilde{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

La dernière ligne est ici caractéristique d'un système incompatible $(0=-2)$.

4. La matrice étendue du système (S_1) est

$$\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système (S_1) est donc de rang 2. Il admet donc une droite de solutions, définie par

$$\begin{aligned}
(S_1) &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 3y & + & 3z & = & 3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & 1-y-2z & = & 1-(1-z)-2z & = & -z \\ y & = & 1-z & & & & \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système (S_1) est donc

$$\Sigma_1 = \{(-z, 1-z, z), \quad z \in \mathbb{R}\} = \{z.(-1,-1,1) + (0,1,0), \quad z \in \mathbb{R}\}$$

On reconnaît ici la droite de l'espace dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (-1,-1,1)$ et passant par le point $P = (0,1,0)$.

⋆ ⋆
⋆