CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation

$$x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 3y + 1 = 0$$

1. Construire la matrice A de la forme quadratique $q(x, y)$ associée à l'équation ci-dessus.
2. Montrer $\text{Spec}(A) = \{0, 2\}$. En déduire la signature de $q(x, y)$ et la nature de $\mathcal{C}$.
3. Construire une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ du plan faite de vecteurs propres de A de norme 1 et vérifier que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée.
   ATTENTION : on prendra $\overrightarrow{e_1} \in E_0$ et $\overrightarrow{e_2} \in E_2$.
4. Donner sans calcul la matrice de passage P de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et la matrice P^{-1}.
5. Donner sans calcul la forme quadratique $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y})$ associée à $q(x, y)$ via le changement de repère puis déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$.
6. Déterminer un second changement de variables $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightsquigarrow (X, Y)$ tel que l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère associé aux coordonnées (X, Y) soit
$$Y^2 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} X$$
7. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de l'unique sommet de $\mathcal{C}$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note

- $q_a(x, y) = (1 + a)(x^2 + y^2) + 2(1 - a)xy$,
- $\mathcal{C}_a$ la conique d'équation $q_a(x, y) = 1$.

1. Donner la matrice A de la forme quadratique $q_a(x, y)$.
2. Déterminer, en fonction de a, les valeurs propres de A.
3. En déduire la signature de q_a en fonction des valeurs de a.
4. On suppose ici que $\underline{a \neq 1}$.
   (a) Montrer que les sous espaces propres de A sont deux droites orthogonales du plan, indépendantes de a.
   (b) Donner en fonction de a la nature de $\mathcal{C}_a$ ainsi que ses axes principaux (on fera une esquisse pour chacun des cas étudiés).
5. Détermine et tracer la courbe $\mathcal{C}_1$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\mathcal{Q}_\lambda$ la quadrique de l'espace d'équation

$$x^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 4y = \lambda$$

1. Soit $\Omega = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$. Montrer que l'équation de $\mathcal{Q}_\lambda$ dans le repère $\mathcal{R}_\Omega = (\Omega\,;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est
$$X^2 + Z^2 + 2XY + 2YZ = \lambda - 2$$
2. Montrer que le point Ω est centre de symétrie de $\mathcal{Q}_\lambda$.
3. Donner la matrice A de la forme quadratique $q(X, Y, Z) = X^2 + Z^2 + 2XY + 2YZ$.
4. Montrer que $\mathrm{Spec}(A) = \{2, 1, -1\}$.
   Ind. : on pourra commencer par effectuer l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$ dans le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$.
5. Donner sans calcul l'équation de $\mathcal{Q}_\lambda$ dans un repère orthonormé adapté aux sous espaces propres E_2, E_1 et E_{-1}.
6. Donner le type de la conique $\mathcal{Q}_\lambda$ en fonction des différentes valeurs de λ. On fera une esquisse pour chacun des cas distingués en faisant apparaître les sous espaces propres.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Puisque $q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) \\ &= \lambda(\lambda-2) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{2, 0\}$. La signature de $q(x,y)$ est donc $(1,0)$ et $\mathcal{C}$ est une parabole.

3. • $\underline{E_0}$:

$$AX = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ -x + y & = & 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; y = x$$

Donc $E_0 = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$. C'est une droite, engendrée par exemple par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

• $\underline{E_2}$:

$$AX = 2X \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 2x \\ -x + y & = & 2y \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; y = -x$$

Donc $E_2 = \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$. C'est une droite, engendrée par exemple par le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

On a pris soin de normer les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. La famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ forme donc une base orthonormée si les deux vecteurs sont orthogonaux. Or

$$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}(1 \times (-1) + 1 \times 1) = 0$$

Donc $\mathcal{B}$ est bien une BON.

4. Par définition, on a $P = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'autre part, P étant la matrice de passage d'une BON à une BON, on a également $P^{-1} = {}^tP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Étant données les valeurs propres de A et le choix que l'on a fait dans l'ordre des vecteurs dans P, on a

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\tilde{y}^2$$

D'autre part, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x} - \tilde{y}) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x} + \tilde{y}) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} p(x,y) &= x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 3y + 1 \\ &= 2\tilde{y}^2 + 3\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x} - \tilde{y}) + 3\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x} + \tilde{y}) + 1 \\ &= 2\tilde{y}^2 + 3\sqrt{2}\tilde{x} + 1 \end{aligned}$$

et l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ est

$$(\tilde{E}) \ : \ 2\tilde{y}^2 + 3\sqrt{2}\tilde{x} + 1 = 0$$

6.

$$(\tilde{E}) \Leftrightarrow 2\tilde{y}^2 + 3\sqrt{2}\left(\tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2Y^2 = -3\sqrt{2}X$$

en posant

$$\begin{cases} X &= \tilde{x} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ Y &= y \end{cases}$$

7. On reconnaît ici l'équation réduite d'une parabole dans un repère orthonormé $\mathcal{R}''$ obtenu par translation du repère $\mathcal{R}'$. Le centre de ce dernier repère est le sommet S de la parabole. Donc

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$$

On retrouve alors les coordonnées de S dans $\mathcal{R}$ via la matrice de passage P :

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = P \times \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1-a \\ 1-a & 1+a \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & 1-a \\ 1-a & 1+a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+a-\lambda)^2 - (1-a)^2 \\ &= (1+a-\lambda-(1-a))(1+a-\lambda+(1-a)) \\ &= (2a-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{2a, 2\}$.

3. • Si $a > 0$, alors $\sigma(q_a) = (2, 0)$.
   • Si $a < 0$, alors $\sigma(q_a) = (1, 1)$.
   • Si $a = 0$, alors $\sigma(q_a) = (1, 0)$.
4. (a) • $\underline{E_{2a}}$:

$$AX = 2aX \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} (1+a)x & + & (1-a)y & = & 2ax \\ (1-a)x & + & (1+a)y & = & 2ay \end{array} \right. \Leftrightarrow y = -x$$

Donc $E_{2a} = \{(x, -x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

• $\underline{E_2}$:

$$AX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} (1+a)x & + & (1-a)y & = & 2x \\ (1-a)x & + & (1+a)y & = & 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow y = x$$

Donc $E_2 = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

Quelque soit $a \neq 1$, les sous espaces propres de A sont les deux bissectrices du plan (xOy). Ce sont donc bien deux droites orthogonales entre elles, indépendantes de a.

(b) La nature de $\mathcal{C}_a$ dépend de la signature de q_a et donc du signe de a. Ainsi,

• Si $a < 0$, $\sigma(q_a) = (1, 1)$. $\mathcal{C}_a$ est donc une hyperbole dont l'axe focal est E_2 et dont le second axe de symétrie est E_{2a}.

• Si $a > 0$ (et $a \neq 1$), alors $\sigma(q_a) = (2, 0)$. $\mathcal{C}$ est donc une ellipse. D'autre part, son axe focal est associé à sa plus petite valeur propre. Il faut donc distinguer deux sous cas :

— Si $0 < a < 1$, alors $2a < a$ et l'axe focal de $\mathcal{C}_a$ est E_{2a}, E_2 étant alors le second axe de symétrie.
— Si $a > 1$, alors $2 < 2a$ et l'axe focal de $\mathcal{C}_a$ est E_2, E_{2a} étant le second axe de symétrie.

• Si $a = 0$, $\sigma(q_a) = (1, 0)$ et $\mathcal{C}_a$ est une parabole. Son axe focal (et unique axe de symétrie) est alors E_0.

5. $\mathcal{C}_1$ est la courbe d'équation

$$2(x^2 + y^2) = 1 \iff x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

$\mathcal{C}_1$ est donc le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 :

1. Si l'on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace dans $\mathcal{R}_\Omega$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$, alors

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x &= -1 + X \\ y &= 1 + Y \\ z &= -1 + Z \end{cases}$$

L'équation de $\mathcal{Q}_\lambda$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ est alors

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 4y = \lambda &\Leftrightarrow (X-1)^2 + (Z-1)^2 + 2(X-1)(Y+1) \\ &\quad + 2(Y+1)(Z-1) + 4(Y+1) = \lambda \\ &\Leftrightarrow X^2 - \cancel{2X} + 1 + Z^2 - \cancel{2Z} + 1 + 2XY + \cancel{2X} - \cancel{2Y} - \cancel{2} \\ &\quad + 2YZ - \cancel{2Y} + \cancel{2Z} - \cancel{2} + \cancel{4Y} + \cancel{4} = \lambda \\ &\Leftrightarrow X^2 + Z^2 + 2XY + 2YZ = \lambda - 2 \end{aligned}$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega} \in \mathcal{Q}_\lambda$. Le symétrique de M par rapport à Ω est $M' = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \\ -Z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$.
Mais puisque l'équation de $\mathcal{Q}_\lambda$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ ne contient que des termes de degré 2, si les coordonnées de M vérifient cette équation, celles de M' également. Donc si $M \in \mathcal{Q}_\lambda$ alors $M' \in \mathcal{Q}_\lambda$.

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{2, 1, -1\}$.

5. En note $E_2 = (OX)$, $E_1 = (OY)$ et $E_{-1} = (OZ)$, l'équation de $\mathcal{Q}_\lambda$ dans un repère orthonormé $(OXYZ)$ est
$$2X^2 + Y^2 - Z^2 = \lambda - 2$$
6. La signature de la forme quadratique $2X^2 + Y^2 - Z^2$ étant $(2, 1)$, la quadrique $\mathcal{Q}_\lambda$ est un hyperboloïde. D'autre part,

   - si $\lambda \neq 2$, on obtient une équation réduite de $\mathcal{Q}_\lambda$ en divisant l'équation ci-dessus par $\lambda - 2$:
   $$\frac{2}{\lambda-2}X^2 + \frac{1}{\lambda-2}Y^2 - \frac{1}{\lambda-2}Z^2 = 1$$
   Ainsi,
   — Si $\lambda > 2$, la signature de $\mathcal{Q}_\lambda$ est $(2, 1)$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ est un hyperboloïde à une nappe.
   — Si $\lambda < 2$, la signature de $\mathcal{Q}_\lambda$ est $(1, 2)$ et $\mathcal{Q}_\lambda$ est un hyperboloïde à deux nappes.

   - $\mathcal{Q}_2$ a pour équation
   $$2X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$$
   On reconnaît ici l'équation d'un cône elliptique de l'espace (qui fait la "transition" entre un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes).

⋆ ⋆
⋆